

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Машиноведение и детали машин»

## **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ, МАШИН И МАНИПУЛЯТОРОВ**

Пособие

для студентов специальности 6-05-0714-03  
«Инженерно-техническое проектирование  
и производство материалов и изделий из них»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов  
Республики Беларусь по образованию  
в области металлургического оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2025

УДК 621.01(075.8)

ББК 34.41

Д46

А в т о р ы:

*Е. М. Дубовская, В. К. Акулич*

Р е ц е н з е н т ы:

*Д. В. Куис, В. В. Тульев*

**Дубовская, Е. М.**

Д46 Теория механизмов, машин и манипуляторов : пособие для студентов специальности 6-05-0714-03 «Инженерно-техническое проектирование и производство материалов и изделий из них» / Е. М. Дубовская, В. К. Акулич. – Минск : БНТУ, 2025. – 66 с.  
ISBN 978-985-31-0045-7.

Учебно-методическое пособие представляет собой руководство по выполнению курсового проекта и курсовой работы по дисциплине «Теория механизмов, машин и манипуляторов». Показаны особенности решения задач динамики машин и механизмов, синтеза кулачковых механизмов.

**УДК 621.01(075.8)**

**ББК 34.41**

**ISBN 978-985-31-0045-7**

© Белорусский национальный  
технический университет, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ МАШИНЫ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ .....	6
2. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МАШИНЫ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ .....	9
2.1. Задачи динамического синтеза и анализа машины .....	9
2.2. Структурный анализ рычажного механизма .....	9
2.3. Определение кинематических характеристик рычажного механизма методом планов .....	11
2.3.1. Построение планов положений механизма .....	11
2.3.2. Построение планов аналогов скоростей .....	12
2.3.3. Аналитический метод .....	15
2.4. Определение сил полезного (технологического) сопротивления .....	19
2.5. Динамическая модель машины .....	20
2.6. Определение приведенного момента сил сопротивления $M_{\Pi}^C$ .....	21
2.7. Определение работы сил сопротивления $A_C$ и работы движущих сил $A_D$ .....	23
2.8. Определение приведенного момента движущих сил $M_{\Pi}^D$ .....	26
2.9. Определение переменной составляющей приведенного момента инерции $I_{\Pi}^{II}$ .....	27
2.10. Определение постоянной составляющей приведенного момента инерции $I_{\Pi}^I$ и момента инерции маховика $I_M$ .....	28
2.11. Определение закона движения звена приведения .....	32
2.12. Выводы .....	34
3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА .....	35
3.1. Задачи динамического анализа механизма .....	35
3.2. Графический метод .....	35
3.2.1. Кинематический анализ для положения 2 .....	35
3.2.2. Кинематический анализ для положения 11 .....	39
3.2.3. Силовой анализ для положения 2 .....	40
3.2.4. Силовой анализ для положения 11 .....	43

3.3. Аналитический метод.....	45
3.3.1. Кинематический анализ .....	45
3.3.2. Силовой анализ.....	46
4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА.....	49
4.1. Задачи проектирования .....	49
4.2. Определение кинематических характеристик .....	49
4.3. Определение основных размеров кулачкового механизма .....	55
4.3.1. Графический метод .....	55
4.3.2. Аналитический метод .....	56
4.4. Определение полярных координат центрального профиля кулачка .....	56
4.5. Определение углов давления.....	58
4.6. Построение профиля кулачка.....	60
4.7. Выводы .....	62
ЛИТЕРАТУРА.....	63
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	64

## ВВЕДЕНИЕ

Курсовое проектирование по теории механизмов, машин и манипуляторов предусматривает решение ряда задач: динамика машинного агрегата, динамический анализ основного исполнительного механизма машины, синтез кулачкового механизма. При решении этих задач можно использовать как аналитические методы, на основе которых разрабатываются алгоритмы и программные продукты, так и традиционные графические методы.

Студенту выдается задание на курсовое проектирование, содержащее описание работы машины и исходные данные. Курсовая работа состоит из пояснительной записки, выполняемой на листах формата А4, и графической части на двух листах формата А1. Курсовой проект предполагает выполнение графической части на трех листах формата А1.

Настоящее пособие построено в виде примера последовательности выполнения курсовой работы (курсового проекта) и оформления пояснительной записки со всеми необходимыми расчетами и графическими построениями. Каждая глава начинается с постановки задач, описания последовательности и методик проектирования, что позволяет четко определить место всех расчетов в общей схеме исследования. В случае затруднений рекомендуется обращаться к литературным источникам, указанным в ссылках. Пособие рекомендуется при применении графических методов расчетов. Примеры выполнения графической части представлены в приложении.

## 1. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ МАШИНЫ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Вытяжной пресс предназначен для получения изделий методом глубокой вытяжки. Деформация заготовки осуществляется пуансоном, установленным на ползуне 3 кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.1, а). Ползун совершает возвратно-поступательное движение вверх – вниз. Рабочий ход происходит при движении ползуна вниз, причем деформация заготовки производится только на части рабочего хода, равной  $0,7H$ , где  $H$  – ход ползуна. График усилия вытяжки  $F_3$  (силы полезного сопротивления), действующей на ползун в зависимости от его перемещения, показан на рис. 1.1, б.

Кривошипный вал 1 исполнительного рычажного механизма приводится во вращение электродвигателем 4 через зубчатый редуктор, состоящий из планетарной передачи  $Z_1 - Z_2 - Z_{2'} - Z_3 - H$  и простой передачи  $Z_4 - Z_5$  (рис. 1.1, в).

Готовое изделие выталкивается из матрицы выталкивателем, движение которого обеспечивается кулачковым механизмом (рис. 1.1, г) через систему рычагов. Кулачковый механизм состоит из кулачка 5 и толкателя 6 с роликом 7. Требуемый закон изменения аналога ускорения толкателя показан на рис. 1.1, д.

Для обеспечения необходимой степени неравномерности вращения кривошипного вала 1 на нем установлен маховик 8. Исходные данные для проектирования приведены в табл. 1.1.

### Примечание.

1.  $l_{AS_2} = 0,35l_{AB}$ .
2. Массы звеньев  $m_2 = ql_{AB}$ , где  $q = 70 \text{ кг/м}$ ,  $m_3 = 3m_2$ .
3. Момент инерции звена 2  $I_{S_2} = 0,17m_2l_{AB}^2$ .

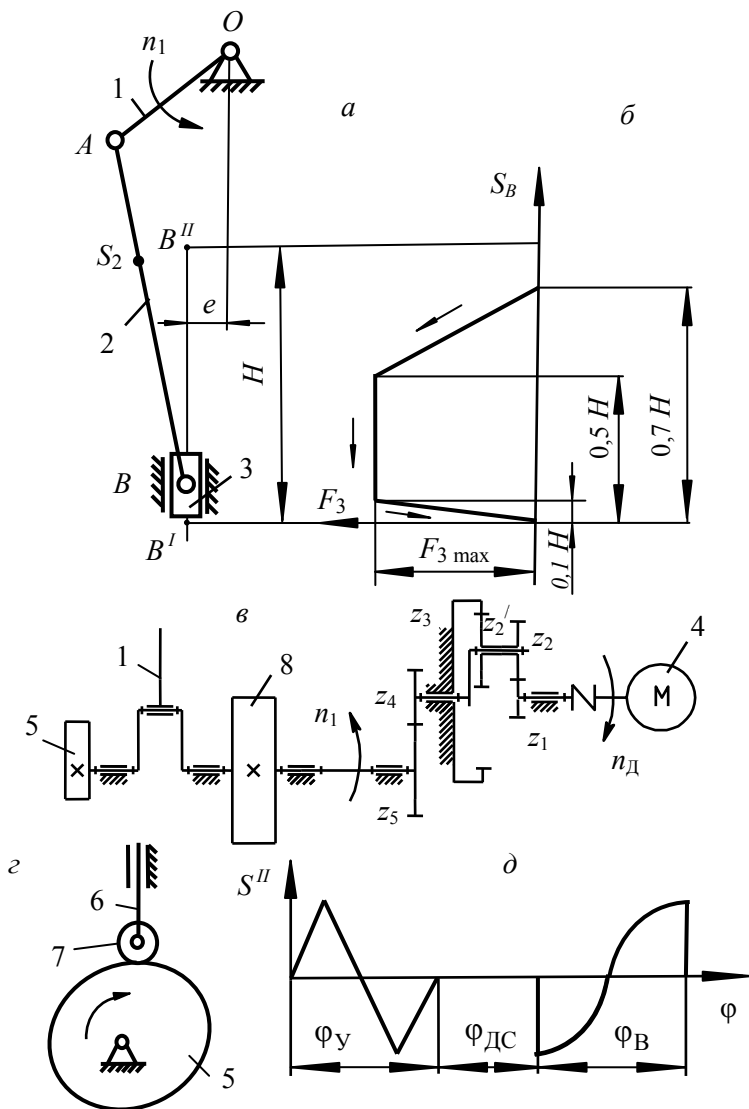


Рис. 1.1. Исходные данные для проектирования

Таблица 1.1

## Исходные данные для проектирования

№ пп	Параметр	Обозначение	Размерность	Величина
1	Размеры рычажного механизма	$l_{OA}$	м	0,1
		$l_{AB}$	м	0,42
		$e$	м	0,04
2	Частота вращения электродвигателя	$n_D$	об/мин	960
3	Частота вращения кривошипа 1	$n_1$	об/мин	120
4	Максимальное усилие вытяжки	$F_{3\max}$	Н	20 000
5	Масса звена 1 (без маховика)	$m_1$	кг	50
6	Момент инерции звена 1 (без маховика)	$I_0$	кг·м <sup>2</sup>	0,1
7	Момент инерции ротора электродвигателя	$I_p$	кг·м <sup>2</sup>	0,05
8	Приведенный к валу 1 момент инерции звеньев редуктора	$I_{\text{ред}}^п$	кг·м <sup>2</sup>	2
9	Коэффициент неравномерности вращения звена 1	$\delta$	—	0,1
10	Ход толкателя кулачкового механизма	$h$	м	0,06
11	Фазовые углы поворота кулачка:			
	— удаления	$\varphi_U$	град	80
	— дальнего стояния	$\varphi_{ДС}$	град	20
	— возвращения	$\varphi_B$	град	80
12	Максимально допустимый угол давления в кулачковом механизме	$\theta_{\max}$	град	30



## 2. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МАШИНЫ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ

### 2.1. Задачи динамического синтеза и анализа машины

Динамический синтез машины по коэффициенту неравномерности движения  $\delta$  состоит в определении такой величины постоянной составляющей приведенного момента инерции  $I_{\Pi}'$ , при которой колебания скорости звена приведения не выходят за пределы, установленные этим коэффициентом. Обычно это достигается установкой дополнительной вращающейся массы, выполняемой в виде маховика.

Динамический анализ машины состоит в определении законов движения звена приведения в виде зависимостей угловой скорости и углового ускорения звена приведения от обобщенной координаты –  $\omega_1(\varphi_1)$  и  $\varepsilon_1(\varphi_1)$ .

Блок-схема исследования динамики машины показана на рис. 2.1.

### 2.2. Структурный анализ рычажного механизма

Структурная схема основного исполнительного механизма изображена на рис. 2.2, *а*. Число подвижных звеньев  $n = 3$ . Число низших кинематических пар  $p_H = 4$ , в том числе вращательные пары –  $O(1,0)$ ,  $A(1,2)$ ,  $B(2,3)$ , поступательная пара –  $B(3,0)$ . Число высших кинематических пар  $p_B = 0$ . Число степеней свободы механизма

$$W = 3n - 2p_H - p_B = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Таким образом, для того, чтобы все звенья механизма совершали однозначно определенные движения, необходимо задать движение одному звену – в данном случае кривошипу  $I$ . Тогда угловая координата кривошипа  $\varphi_1$  является обобщенной координатой механизма, а кривошип – начальным звеном.

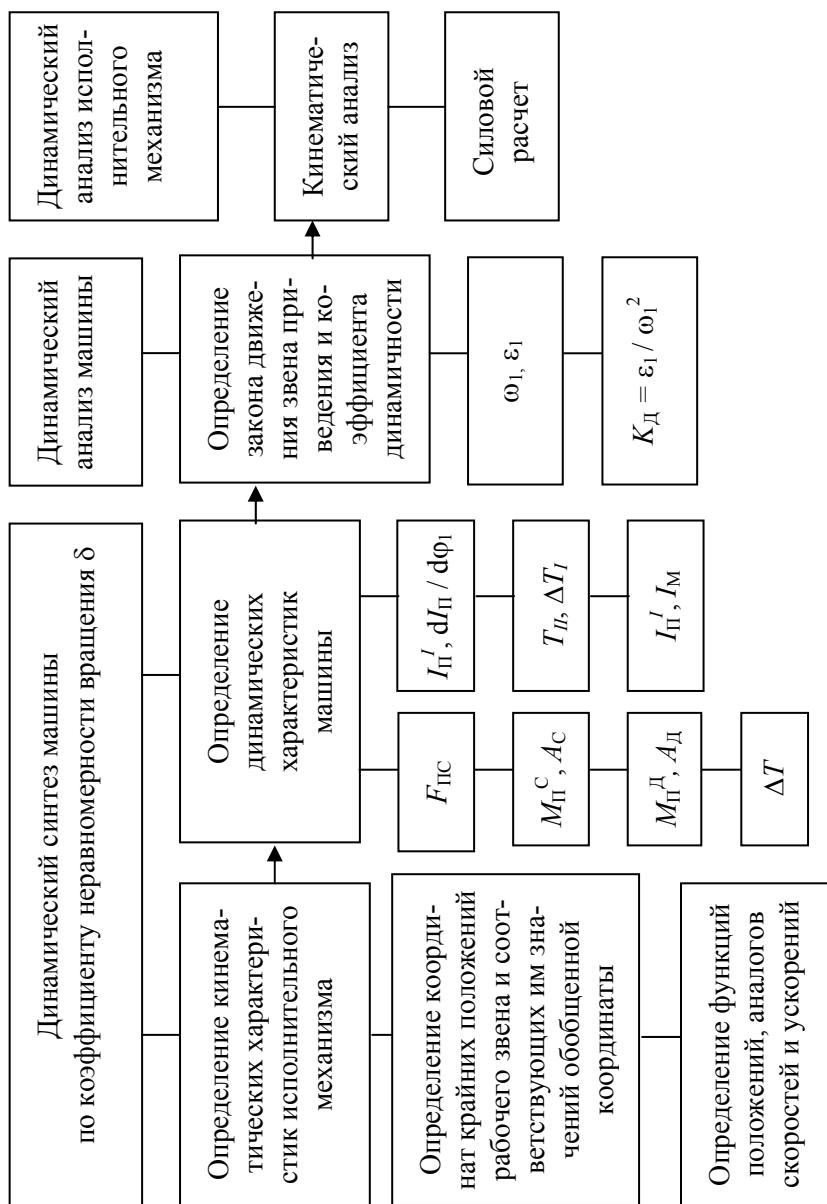


Рис. 2.1. Блок-схема исследования динамики машины

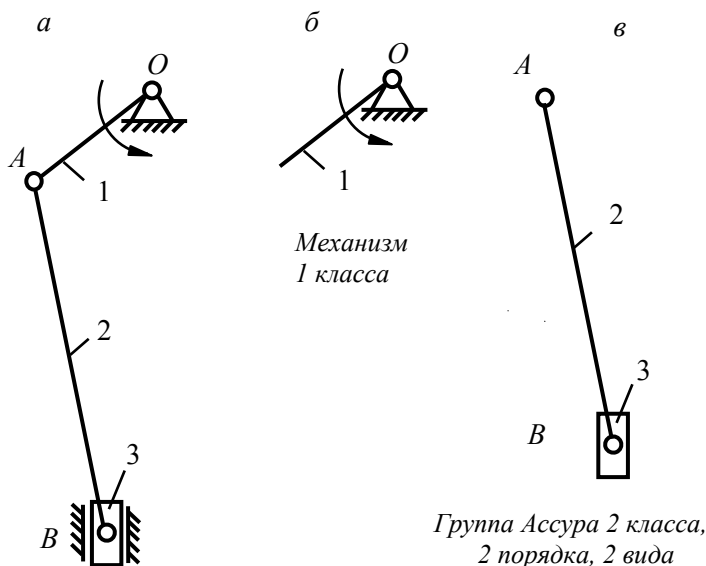


Рис. 2.2 Структурная схема кривошипно-ползунного механизма с разложением на группы Ассура

Механизм образован из механизма 1-го класса (1, 0) (рис. 2.2, б) и структурной группы (2, 3) (рис. 2.2, в).

Формула строения механизма  $I(1,0) \rightarrow II(2,3)$ .

## 2.3. Определение кинематических характеристик рычажного механизма методом планов

### 2.3.1. Построение планов положений механизма

Для построения планов выберем масштабный коэффициент длины  $\mu_S = 0,002$  м/мм.

**Примечание.** Масштабные коэффициенты рекомендуется принимать в виде чисел, содержащих одну цифру 1, 2, ..., 9 с требуемым количеством нулей слева или справа. Например, 0,02; 2; 20.

Определяем чертежные размеры механизма:

$$OA = \frac{l_{OA}}{\mu_S} = \frac{0,1}{0,002} = 50 \text{ мм};$$

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_S} = \frac{0,42}{0,002} = 210 \text{ мм};$$

$$AS_2 = \frac{l_{AS_2}}{\mu_S} = \frac{0,35 l_{AB}}{0,002} = \frac{0,35 \cdot 0,42}{0,002} = 73,5 \text{ мм};$$

$$E = \frac{e}{\mu_S} = \frac{0,04}{0,002} = 20 \text{ мм}.$$

Методом засечек строим 12 последовательных планов положений механизма через 30 градусов по углу поворота кривошипа  $OA$ , начиная с крайнего положения 1, в котором  $\varphi_1 = \varphi_0$  и звенья  $OA$  и  $AB$  вытягиваются в одну прямую линию. Второе крайнее положение 7', в котором звенья  $OA$  и  $AB$  накладываются одно на другое, находим дополнительно. Все положения нумеруются в направлении вращения кривошипа.

На шатуне 2 отрезком  $AS_2$  отмечаем положение точки  $S_2$  на всех планах и соединяем их плавной линией, получая траекторию движения центра масс шатуна.

### ***2.3.2. Построение планов аналогов скоростей***

Для приведения сил и масс потребуются передаточные функции звеньев и центров масс (аналоги скоростей). Для их определения используем графический метод – построение планов аналогов скоростей для всех положений механизма.

Аналог скорости точки  $A$  равен

$$U_A = \frac{V_A}{\omega_1} = \frac{\omega_1 l_{OA}}{\omega_1} = l_{OA} = 0,1 \text{ м}.$$

Принимаем масштабный коэффициент аналогов скоростей  $\mu_U = \mu_S = 0,002$  м/мм. Тогда отрезок, изображающий  $U_A$ , равен

$$pa = \frac{U_A}{\mu_U} = \frac{0,1}{0,002} = 50 \text{ мм.}$$

Так как  $\bar{U}_A \perp OA$  и направлен в сторону вращения кривошипа  $I$ , то откладываем отрезок  $pa \perp OA$  (в соответствующем положении механизма).

Для определения аналога скорости  $\bar{U}_B$  используем векторные уравнения (на основании теоремы о сложении скоростей в плоском движении):

$$\bar{U}_B = \bar{U}_A + \bar{U}_{BA},$$

$$\bar{U}_B = \bar{U}_{B_0} + \bar{U}_{BB_0},$$

где  $\bar{U}_{BA} \perp AB$ ,  $\bar{U}_{B_0} = 0$  (точка  $B_0$  направляющих ползуна неподвижна),  $\bar{U}_{BB_0} \parallel y$ .

Точку  $s_2$  на плане аналогов скоростей находим по теореме подобия:

$$\frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB}, \text{ откуда } as_2 = ab \cdot \frac{AS_2}{AB} = 0,35 \cdot (ab).$$

Находим на плане проекции точки  $s_2 - s_{2x}$  и  $s_{2y}$ .

На основании выполненных построений определяем передаточные функции (аналоги скоростей). Например, для положения 11

$$as_2 = 0,35 \cdot (ab) = 0,35 \cdot 21,8 = 7,6 \text{ мм;}$$

$$i_{31} = U_B = \frac{V_B}{\omega_1} = (pb) \cdot \mu_U = 47,7 \cdot 0,002 = 0,0954 \text{ м;}$$

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{ab}{l_{AB}} \cdot \mu_U = \frac{21,8 \cdot 0,002}{0,42} = 0,1038;$$

$$i_{S_2 1} = U_{S_2} = \frac{V_{S_2}}{\omega_1} = (ps_2) \cdot \mu_U = 48,1 \cdot 0,002 = 0,0962 \text{ м};$$

$$y'_{S_2} = \frac{V_{S_2 y}}{\omega_1} = (ps_{2y}) \cdot \mu_U = 46 \cdot 0,002 = 0,092 \text{ м}.$$

Результаты построений и вычислений приведены в табл. 2.1 и табл. 2.2.

Таблица 2.1

Результаты построений планов аналогов скоростей

№ пол.	Отрезки, мм				
	$ab$	$as_2$	$pb$	$ps_2$	$ps_{2y}$
1	50	17,5	0	32,5	2,5
2	46	16,1	30,7	38,7	25
3	29,5	10,3	49,9	48,2	44,5
4	4,1	1,4	51,2	50,6	50,5
5	22,7	7,9	38,1	44,7	42,5
6	42,4	14,8	18,5	36,8	25
7 <sup>'</sup>	50	17,5	0	32,5	4,5
7	50,2	17,6	1,9	32,6	2
8	45,1	15,8	21,3	36,5	21,5
9	28,4	9,9	38,4	44,1	40
10	3,9	1,4	49,3	49,6	49,5
11	21,8	7,6	47,7	48,1	46
12	41,3	14,5	29,9	39,6	29

Таблица 2.2

## Результаты вычислений аналогов скоростей

№ пол.	$i_{31}$ , м	$i_{21}$	$i_{S21}$ , м	$y'_{S2}$ , м
1	0	0,2381	0,065	0,005
2	0,0614	0,2191	0,0774	0,05
3	0,0997	0,1407	0,0964	0,089
4	0,1024	0,0194	0,1012	0,101
5	0,0761	0,1082	0,0894	0,085
6	0,037	0,2018	0,0736	0,05
7'	0	0,2381	0,065	0,009
7	0,0037	0,2389	0,0652	0,004
8	0,0425	0,2147	0,073	0,043
9	0,0768	0,1353	0,0882	0,08
10	0,0986	0,0185	0,0992	0,099
11	0,0954	0,1038	0,0962	0,092
12	0,0598	0,1966	0,0792	0,058

**2.3.3. Аналитический метод**

В соответствии с алгоритмом расчета, приведенным в пособии [1], выполняем расчет кинематических характеристик аналитическим методом для контрольного положения  $i = 11$  (рис. 2.3). На основании рис. 2.4 находим обобщенную координату  $\varphi_0$  (в крайнем нижнем положении 1):

$$\varphi_0 = 270^\circ - \arcsin\left(\frac{|e|}{l_1 + l_2}\right) = 270^\circ - \arcsin\left(\frac{0,04}{0,1 + 0,42}\right) = 265,6^\circ.$$

Обобщенная координата

$$\varphi_1 = \varphi_0 + (i - 1) \cdot \Delta\varphi_1 = 265,6^\circ + (11 - 1) \cdot 30^\circ = 565,6^\circ.$$

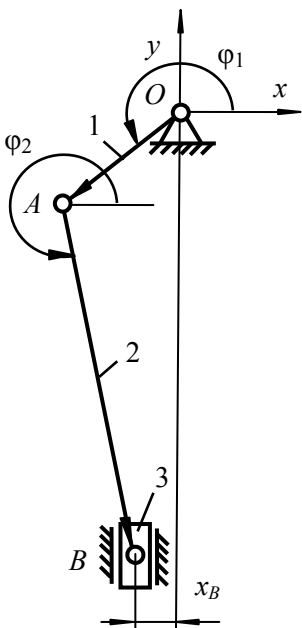


Рис. 2.3. Схема кривошипно-ползунного механизма в положении № 11

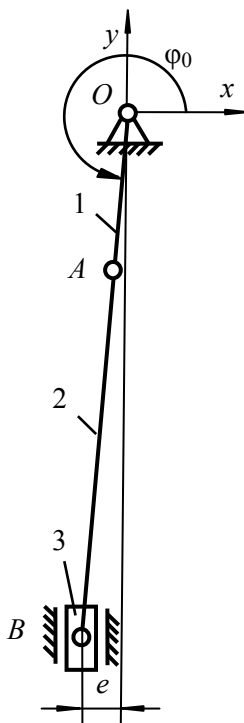


Рис. 2.4. Схема кривошипно-ползунного механизма в положении № 1

Так как  $\varphi_1 > 360^\circ$ , то принимаем  $\varphi_1 = 565,6^\circ - 360^\circ = 205,6^\circ$ .

**Примечание.** Шаг изменения обобщенной координаты равен  $\Delta\varphi_1 = 30^\circ$  при вращении кривошипа против часовой стрелки или  $\Delta\varphi_1 = -30^\circ$  при вращении по часовой стрелке.

$$1. x_A = l_1 \cos \varphi_1 = 0,1 \cdot \cos 205,6^\circ = -0,09018 \text{ м.}$$

$$2. y_A = l_1 \sin \varphi_1 = 0,1 \cdot \sin 205,6^\circ = -0,04321 \text{ м.}$$

$$3. y_B = y_A + a \sqrt{l_2^2 - (x_B - x_A)^2} =$$

$$= -0,04321 - 1 \cdot \sqrt{0,42^2 - (-0,04 + 0,09018)^2} = -0,4602 \text{ м.}$$



$$4. \cos \varphi_2 = \frac{x_B - x_A}{l_2} = \frac{-0,04 + 0,09018}{0,42} = 0,1195.$$

$$5. \sin \varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{l_2} = \frac{-0,4602 + 0,04321}{0,42} = -0,9928.$$

$$6. i_{21} = -\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2 \sin \varphi_2} = -\frac{0,1 \cdot \sin 205,6^\circ}{0,42 \cdot (-0,9928)} = -0,1036.$$

$$7. i_{31} = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21} \cos \varphi_2 = \\ = -0,1 \cdot \cos 205,6^\circ + 0,42 \cdot (-0,1036) \cdot 0,1195 = -0,0954 \text{ м.}$$

$$8. i'_{21} = -\frac{l_1 \cos \varphi_1 + l_2 i_{21}^2 \cos \varphi_2}{l_2 \sin \varphi_2} = \\ = -\frac{0,1 \cos 205,6^\circ + 0,42 \cdot (-0,1036)^2 \cdot 0,1195}{0,42 \cdot (-0,9928)} = -0,215.$$

$$9. i'_{31} = -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 i_{21}^2 \sin \varphi_2 + l_2 i'_{21} \cos \varphi_2 = \\ = -0,1 \cdot \sin 205,6^\circ - 0,42 \cdot (-0,1036)^2 \cdot (-0,9928) + 0,42 \cdot (-0,215) \times \\ \times 0,1195 = 0,0369 \text{ м.}$$

$$10. x_{S_2} = x_A + l_{AS_2} \cos \varphi_2 = -0,09018 + 0,147 \cdot 0,1195 = -0,07261 \text{ м.}$$

$$11. y_{S_2} = y_A + l_{AS_2} \sin \varphi_2 = -0,04321 + 0,147 \cdot (-0,9928) = -0,1892 \text{ м.}$$

$$12. x'_{S_2} = -l_1 \sin \varphi_1 - i_{21} l_{AS_2} \sin \varphi_2 = \\ = -0,1 \cdot \sin 205,6^\circ - (-0,1036) \cdot 0,147 \cdot (-0,9928) = 0,0281 \text{ м.}$$

$$13. y'_{S_2} = l_1 \cos \varphi_1 + i_{21} l_{AS_2} \cos \varphi_2 = \\ = 0,1 \cdot \cos 205,6^\circ - 0,1036 \cdot 0,147 \cdot 0,1195 = -0,092 \text{ м.}$$

$$14. x''_{S_2} = -l_1 \cos \varphi_1 - l_{AS_2} i'_{21} \sin \varphi_2 - l_{AS_2} i_{21}^2 \cos \varphi_2 = \\ = -0,1 \cdot \cos 205,6^\circ - 0,147 \cdot (-0,215) \cdot (-0,9928) - 0,147 \times \\ \times (-0,1036)^2 \cdot 0,1195 = 0,0586 \text{ м.}$$

$$15. \ y_{S_2}'' = -l_1 \sin \varphi_1 + l_{AS_2} i_{21}' \cos \varphi_2 - l_{AS_2} i_{21}^2 \sin \varphi_2 = \\ = -0,1 \cdot \sin 205,6^\circ + 0,147 \cdot (-0,215) \cdot 0,1195 - 0,147 \times \\ \times (-0,1036)^2 (-0,9928) = 0,0410 \text{ м.}$$

$$16. \ |y_{B\max}| = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - x_B^2} = \\ = \sqrt{(0,1 + 0,42)^2 - (-0,04)^2} = 0,5185 \text{ м.}$$

$$17. \ S_B = |y_{B\max}| - |y_B| = 0,5185 - 0,4602 = 0,0583 \text{ м.}$$

$$18. \ i_{S_21} = \sqrt{(x_{S_2}')^2 + (y_{S_2}')^2} = \sqrt{0,0281^2 + (-0,092)^2} = 0,0962 \text{ м.}$$

**Примечание.** В формуле (3)  $a = +1$ , если ползун расположен сверху от начала координат, или  $a = -1$ , если снизу.

Сопоставление результатов расчетов для положения 11 приведено в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Сопоставление результатов расчетов для положения 11

Параметр	Единица измерения	Аналитический метод	Графический метод
$i_{31}$	м	-0,0954	0,0954
$i_{21}$	—	-0,1036	0,1038
$y_{S_2}'$	м	-0,092	0,092
$i_{S_21}$	м	0,0962	0,0962

**Примечание.** Знак «минус» в табл. 2.3 указывает направление соответствующего параметра по отношению к системе координат.

## 2.4. Определение сил полезного (технологического) сопротивления

Заданную механическую характеристику  $F_3(S_B)$  привязываем к крайним положениям механизма и с учетом выполняемого технологического процесса находим силу полезного сопротивления  $F_3$ , действующую на ползун 3, для каждого положения механизма:

$$F_3 = y_F \mu_F,$$

где  $y_F$  – ордината графика  $F_3(S_B)$ , мм;

$\mu_F$  – масштабный коэффициент сил, Н/мм.

$$\mu_F = \frac{F_{3\max}}{y_{F\max}} = \frac{20\,000}{50} = 400 \text{ Н/мм.}$$

Результаты определения  $F_3$  приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Результаты определения силы полезного сопротивления

№ пол.	$y_F$ , мм	$F_3$ , Н
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	38	15 200
11	50	20 000
12	34	13 600
13	0	0

## 2.5. Динамическая модель машины

Чтобы упростить решение задач динамики, машина заменяется динамической моделью в виде вращающегося звена приведения, к которому приложен приведенный момент сил  $M_{\Pi}$  и которое имеет приведенный момент инерции  $I_{\Pi}$  относительно оси вращения (рис. 2.5).

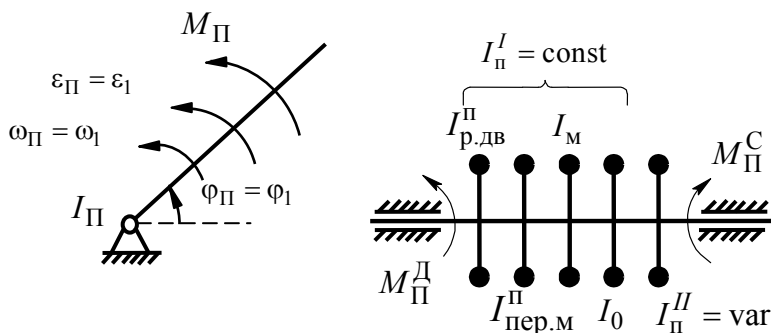


Рис. 2.5. Динамическая модель машины

При этом  $M_{\Pi}$  и  $I_{\Pi}$  должны быть такими, чтобы закон движения звена приведения совпадал с законом движения начального звена исполнительного механизма (кривошипа  $I$ ), т. е. в любой момент  $\varphi_{\Pi} = \varphi_1$ ,  $\omega_{\Pi} = \omega_1$ ,  $\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_1$ . Для этого  $M_{\Pi}$  определяется из условия равенства мгновенных мощностей, а  $I_{\Pi}$  — из условия равенства кинетических энергий.

В свою очередь,  $M_{\Pi} = M_{\Pi}^D - M_{\Pi}^C$ , где  $M_{\Pi}^D$  — приведенный момент движущих сил;  $M_{\Pi}^C$  — приведенный момент сил сопротивления. Кроме того,  $I_{\Pi} = I_{\Pi}^I + I_{\Pi}^{II}$ , где  $I_{\Pi}^I$  — постоянная составляющая приведенного момента инерции;  $I_{\Pi}^{II}$  — переменная составляющая приведенного момента инерции. В величину  $I_{\Pi}^I$  входят собственный момент инерции кривошипа ( $I_0$ ), приведенные моменты инер-

ции ротора электродвигателя и передаточного механизма ( $I_{\text{р.дв}}^{\Pi}$ ,  $I_{\text{пер.м}}^{\Pi}$ ), а также момент инерции  $I_{\text{М}}$  добавочной массы (маховика), причем необходимость установки маховика определяется на основании заданной степени неравномерности движения звена привода. Величина  $I_{\Pi}^{\text{II}}$  получается в результате приведения масс звеньев с переменными передаточными функциями.

## 2.6. Определение приведенного момента сил сопротивления $M_{\Pi}^{\text{C}}$

Приведенный момент сил сопротивления  $M_{\Pi}^{\text{C}}$  определяется из равенства мгновенных мощностей, согласно которому мощность момента  $M_{\Pi}^{\text{C}}$  равна сумме мощностей от силы полезного сопротивления  $F_3$  и сил тяжести звеньев:

$$M_{\Pi}^{\text{C}} \omega_1 = F_3 V_B \pm G_2 V_{S_2y} \pm G_3 V_B,$$

откуда

$$M_{\Pi}^{\text{C}} = F_3 \frac{V_B}{\omega_1} \pm G_2 \frac{V_{S_2y}}{\omega_1} \pm G_3 \frac{V_B}{\omega_1} = F_3 |i_{31}| \pm G_2 \left| y_{S_2}' \right| \pm G_3 |i_{31}|.$$

Здесь знак «плюс» берется в том случае, когда направления силы и соответствующей скорости не совпадают, а знак «минус» – когда эти направления совпадают.

**Примечание.** В случае механизмов с горизонтальным движением ползуна в формуле  $M_{\Pi}^{\text{C}}$  слагаемое  $G_3 |i_{31}|$  отсутствует.

По исходным данным определяем массы звеньев:

$$m_2 = q l_{AB} = 70 \cdot 0,42 = 29,4 \text{ кг};$$

$$m_3 = 3 m_2 = 3 \cdot 29,4 = 88,2 \text{ кг}.$$

Силы тяжести звеньев:

$$G_1 = m_1 g = 50 \cdot 9,81 = 491 \text{ Н};$$

$$G_2 = m_2 g = 29,4 \cdot 9,81 = 288 \text{ Н};$$

$$G_3 = m_3 g = 88,2 \cdot 9,81 = 865 \text{ Н}.$$

Используя табл. 2.2 и 2.4, вычисляем  $M_{\Pi}^C$ . Например, для положения 11

$$M_{\Pi}^C = 20\,000 \cdot 0,0954 - 288 \cdot 0,092 - 865 \cdot 0,0954 = 1799 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Принимаем масштабный коэффициент моментов  $\mu_M = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{мм}$ . Тогда ордината графика для положения 11 равна

$$y_{M_{\Pi}^C} = \frac{M_{\Pi}^C}{\mu_M} = \frac{1799}{20} = 90 \text{ мм}.$$

**Примечание.** При выборе масштабных коэффициентов следует руководствоваться примечанием в п. 2.3.1 и условием максимального заполнения площади листа.

Результаты вычислений для всех положений приведены в табл. 2.5, на основании их построен график  $M_{\Pi}^C(\varphi_1)$ . Масштабный коэффициент углов

$$\mu_{\varphi} = \frac{2\pi}{[1-13]} = \frac{2\pi}{180} = 0,0349 \text{ рад/мм}.$$

Здесь отрезок  $[1-13] = 180 \text{ мм}$  соответствует одному циклу установившегося движения ( $\varphi_{\Pi} = 360^\circ = 2\pi$ ).

Таблица 2.5

**Результаты определения приведенного момента  
сил сопротивления**

№ пол.	$F_3  i_{31} ,$ Н·м	$G_2  y_{S_2}' ,$ Н·м	$G_3  i_{31} ,$ Н·м	$M_{\Pi}^C,$ Н·м	$y_{M_{\Pi}^C},$ мм
1	0	–1,4	0	–1,4	–0,1
2	0	14,4	53,1	67,5	3,4
3	0	25,6	86,2	111,8	5,6
4	0	29,1	88,6	117,7	5,9
5	0	24,5	65,8	90,3	4,5
6	0	14,4	32,0	46,4	2,3
7	0	1,2	–3,2	–2,0	–0,1
8	0	–12,4	–36,8	–49,2	–2,5
9	0	–23,0	–66,4	–89,4	–4,5
10	1499	–28,5	–85,3	1385	69,3
11	1908	–26,5	–82,5	1799	90
12	813	–16,7	–51,7	745	37,3
13	0	–1,4	0	–1,4	–0,1

**2.7. Определение работы сил сопротивления  $A_C$   
и работы движущих сил  $A_D$**

Так как работа сил сопротивления

$$A_C = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_{\Pi}^C d\varphi_1,$$

то график  $A_C(\varphi_1)$  можно построить путем либо численного, либо графического интегрирования зависимости  $M_{\Pi}^C(\varphi_1)$ .

Используем численное интегрирование по методу трапеций, согласно которому

$$A_{Ci} = A_{C(i-1)} + \frac{M_{\Pi(i-1)}^C + M_{\Pi i}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1,$$

где  $\Delta\varphi_1$  – шаг интегрирования.

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{12} = 0,5236 \text{ рад.}$$

В результате получаем:

$$A_{C1} = 0;$$

$$A_{C2} = A_{C1} + \frac{M_{\Pi1}^C + M_{\Pi2}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 0 + \frac{-1,4 + 67,5}{2} \cdot 0,5236 = 17,3 \text{ Дж};$$

$$A_{C3} = A_{C2} + \frac{M_{\Pi2}^C + M_{\Pi3}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 17,3 + \frac{67,5 + 111,8}{2} \cdot 0,5236 = 64,2 \text{ Дж};$$

$$A_{C4} = A_{C3} + \frac{M_{\Pi3}^C + M_{\Pi4}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 64,2 + \frac{111,8 + 117,7}{2} \cdot 0,5236 = 124,3 \text{ Дж};$$

$$A_{C5} = A_{C4} + \frac{M_{\Pi4}^C + M_{\Pi5}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 124,3 + \frac{117,7 + 90,3}{2} \cdot 0,5236 = 178,8 \text{ Дж};$$

$$A_{C6} = A_{C5} + \frac{M_{\Pi5}^C + M_{\Pi6}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 178,8 + \frac{90,3 + 46,4}{2} \cdot 0,5236 = 214,6 \text{ Дж};$$

$$A_{C7} = A_{C6} + \frac{M_{\Pi6}^C + M_{\Pi7}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 214,6 + \frac{46,4 - 2,0}{2} \cdot 0,5236 = 226,2 \text{ Дж};$$

$$A_{C8} = A_{C7} + \frac{M_{\Pi7}^C + M_{\Pi8}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 226,2 + \frac{-2,0 - 49,2}{2} \cdot 0,5236 = 212,8 \text{ Дж};$$

$$A_{C9} = A_{C8} + \frac{M_{\Pi8}^C + M_{\Pi9}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 212,8 + \frac{-49,2 - 89,4}{2} \cdot 0,5236 = 176,5 \text{ Дж};$$



$$A_{C10} = A_{C9} + \frac{M_{\Pi9}^C + M_{\Pi10}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 176,5 + \frac{-89,4 + 1385}{2} \cdot 0,5236 = 515,7 \text{ Дж};$$

$$A_{C11} = A_{C10} + \frac{M_{\Pi10}^C + M_{\Pi11}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 515,7 + \frac{1385 + 1799}{2} \cdot 0,5236 = 1349 \text{ Дж};$$

$$A_{C12} = A_{C11} + \frac{M_{\Pi11}^C + M_{\Pi12}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 1349 + \frac{1799 + 745}{2} \cdot 0,5236 = 2015 \text{ Дж};$$

$$A_{C13} = A_{C12} + \frac{M_{\Pi12}^C + M_{\Pi13}^C}{2} \cdot \Delta\varphi_1 = 2015 + \frac{745 - 1,4}{2} \cdot 0,5236 = 2210 \text{ Дж}.$$

Таким образом, работа сил сопротивления за цикл  $A_{C\text{ц}} = A_{C13} = 2210 \text{ Дж}$ .

Для построения графика  $A_C(\varphi_1)$  принимаем масштабный коэффициент работ  $\mu_A = 20 \text{ Дж/мм}$ . Тогда ординаты графика  $A_C(\varphi_1)$

$$y_{A_C} = \frac{A_C}{\mu_A}.$$

Например, для положения 11

$$y_{A_C} = \frac{1349}{20} = 67,5 \text{ мм}.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.6, на основании которой построен график  $A_C(\varphi_1)$ .

Так как за цикл установившегося движения изменение кинетической энергии машины  $\Delta T = A_D - A_C = 0$  и, следовательно, работы движущих сил и сил сопротивления равны ( $A_{D\text{ц}} = A_{C\text{ц}}$ ), то, учитывая, что приведенный момент движущих сил принимается постоянным  $M_{\Pi}^D = \text{const}$ , график работы движущих сил  $A_D(\varphi_1)$  изображается в виде прямой линии, соединяющей начало координат и конец графика  $A_C(\varphi_1)$ .

Таблица 2.6

Результаты определения работы сил сопротивления

№ пол.	$A_C$ , Дж	$y_{A_C}$ , мм
1	0	0
2	17,3	0,9
3	64,2	3,2
4	124,3	6,2
5	178,8	8,9
6	214,6	10,7
7	226,2	11,3
8	212,8	10,6
9	176,5	8,8
10	515,7	25,8
11	1349	67,5
12	2015	100,8
13	2210	110,5

## 2.8. Определение приведенного момента движущих сил $M_{\Pi}^{\text{Д}}$

Так как работа движущих сил за цикл  $A_{\text{ДЦ}} = M_{\Pi}^{\text{Д}} \cdot 2\pi$ , то приведенный момент движущих сил равен

$$M_{\Pi}^{\text{Д}} = \frac{A_{\text{ДЦ}}}{2\pi} = \frac{A_{\text{СЦ}}}{2\pi} = \frac{2210}{2\pi} = 352 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ордината графика  $M_{\Pi}^{\text{Д}} = \text{const}$  равна

$$y_{M_{\Pi}^{\text{Д}}} = \frac{M_{\Pi}^{\text{Д}}}{\mu_{\text{М}}} = \frac{352}{20} = 17,6 \text{ мм}.$$

## 2.9. Определение переменной составляющей приведенного момента инерции $I_{\Pi}^{II}$

Переменная составляющая приведенного момента инерции  $I_{\Pi}^{II}$  определяется из равенства кинетических энергий, согласно которому кинетическая энергия звена приведения с моментом инерции  $I_{\Pi}^{II}$  равна сумме кинетических энергий звеньев 2 и 3:

$$\frac{I_{\Pi}^{II} \omega_1^2}{2} = \frac{m_2 V_{S2}^2}{2} + \frac{I_{S2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_B^2}{2},$$

откуда

$$I_{\Pi}^{II} = A + B + C,$$

где  $A = m_2 i_{S21}^2$ ,  $B = I_{S2} i_{21}^2$ ,  $C = m_3 i_{31}^2$ .

Например, для положения 11

$$A = 29,4 \cdot 0,0962^2 = 0,2721 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$B = 0,882 \cdot 0,1038^2 = 0,0095 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$C = 88,2 \cdot 0,0954^2 = 0,8027 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{\Pi}^{II} = 0,2721 + 0,0095 + 0,8027 = 1,084 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Принимаем масштабный коэффициент  $\mu_I = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{мм}$ .

Тогда ординаты графиков для положения 11 равны

$$y_I = \frac{I_{\Pi}^{II}}{\mu_I} = \frac{1,084}{0,01} = 108,4 \text{ мм};$$

$$y_A = \frac{A}{\mu_I} = \frac{0,2721}{0,01} = 27,2 \text{ мм};$$

$$y_B = \frac{B}{\mu_I} = \frac{0,0095}{0,01} \approx 1 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{C}{\mu_I} = \frac{0,8027}{0,01} = 80,3 \text{ мм}.$$

Результаты вычислений для всех положений приведены в табл. 2.7, на основании которой построены графики  $I_{\Pi}^{II}(\varphi_1)$  и ее составляющих  $A, B, C$ .

## 2.10. Определение постоянной составляющей приведенного момента инерции $I_{\Pi}^I$ и момента инерции маховика $I_M$

Путем графического вычитания ординат работ  $A_D$  и  $A_C$  строим график изменения кинетической энергии машины  $\Delta T = A_D - A_C$ . Масштабный коэффициент  $\mu_T = \mu_A = 20 \text{ Дж/мм}$ .

Определение  $I_{\Pi}^I$  производим методом Н. И. Мерцалова. Для этого строим график изменения кинетической энергии  $\Delta T_I(\varphi_1)$  звеньев с постоянным приведенным моментом инерции  $I_{\Pi}^I$ .

При этом

$$\Delta T_I = \Delta T - T_{II},$$

где  $T_{II} \approx \frac{I_{\Pi}^{II} \omega_{1cp}^2}{2}$  – кинетическая энергия звеньев с переменным приведенным моментом инерции  $I_{\Pi}^{II}$ .

Таблица 2.7

Результаты определения переменной составляющей приведенного момента инерции  
и ее составляющих

№ пол.	$A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$B, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_{\text{п}}^{\text{II}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$y_A, \text{мм}$	$y_B, \text{мм}$	$y_C, \text{мм}$	$y_I, \text{мм}$
1	0,1242	0,05	0	0,174	12,4	5,0	0	17,4
2	0,1733	0,042	0,3327	0,548	17,3	4,2	33,3	54,8
3	0,2701	0,017	0,8773	1,165	27,0	1,7	87,7	116,5
4	0,2986	0	0,9251	1,224	29,9	0	92,5	122,4
5	0,2369	0,01	0,5109	0,758	23,7	1,0	51,1	75,8
6	0,1572	0,036	0,1210	0,314	15,7	3,6	12,1	31,4
7	0,1239	0,05	0,0012	0,175	12,4	5,0	0,1	17,5
8	0,1553	0,041	0,1593	0,355	15,5	4,1	15,9	35,5
9	0,2301	0,016	0,5196	0,765	23,0	1,6	52,0	76,6
10	0,2907	0	0,9575	1,148	29,1	0	85,8	114,8
11	0,2721	0,009	0,8027	1,084	27,2	0,9	80,3	108,4
12	0,1823	0,034	0,3150	0,531	18,2	3,4	31,5	53,1
13	0,1242	0,05	0	0,174	12,4	5,0	0	17,4

Тогда

$$y_{\Delta T_I} = y_{\Delta T} - k y_I,$$

где  $y_{\Delta T_I}$ ,  $y_{\Delta T}$ ,  $y_I$  – ординаты соответствующих графиков;

$$k = \frac{\mu_I \omega_{1cp}^2}{2\mu_T},$$

где  $\omega_{1cp}$  – средняя угловая скорость кривошипа 1, равная

$$\omega_{1cp} = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 12,57 \text{ рад/с.}$$

Тогда

$$k = \frac{0,01 \cdot 12,57^2}{2 \cdot 20} = 0,0395.$$

Например, для положения 11

$$y_{\Delta T_I} = 21,9 - 4,3 = 17,6 \text{ мм.}$$

Результаты определения ординат  $y_{\Delta T_I}$  приведены в табл. 2.8, на основании которой построен график  $\Delta T_I(\varphi_1)$ . На графике  $\Delta T_I(\varphi_1)$  находим наибольший перепад кинетической энергии:

$$\Delta T_{Iab} = (ab) \mu_T = 66,5 \cdot 20 = 1330 \text{ Дж.}$$

Тогда

$$I_{\Pi}^I = \frac{\Delta T_{Iab}}{\delta \omega_{1cp}^2} = \frac{1330}{0,1 \cdot 12,57^2} = 84,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таблица 2.8

Результаты определения ординат графиков изменений  
кинетических энергий  $y_{\Delta T}$  и  $y_{\Delta T_I}$

№ пол.	$y_{\Delta T}$ , мм	$k y_I$ , мм	$y_{\Delta T_I}$ , мм
1	0	0,7	-0,7
2	8,1	2,2	5,9
3	14,6	4,6	10,0
4	20,5	4,8	15,7
5	26,6	3,0	23,6
6	33,8	1,2	32,6
7	42,2	0,7	41,5
8	51,8	1,4	50,4
9	62,6	3,0	59,6
10	55,8	4,5	51,3
11	21,9	4,3	17,6
12	-2,6	2,1	-4,7
13	0	0,7	-0,7

Из условия равенства кинетических энергий находим приведенный момент инерции всех вращающихся звеньев (без маховика)

$$\begin{aligned}
 I_{\Pi}^0 &= I_0 + I_p^{\Pi} + I_{ред}^{\Pi} = I_0 + I_p \left( \frac{n_d}{n_1} \right)^2 + I_{ред}^{\Pi} = \\
 &= 0,1 + 0,05 \left( \frac{960}{120} \right)^2 + 2 = 5,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.
 \end{aligned}$$

Так как  $I_{\Pi}^I > I_{\Pi}^0$ , то требуется установка маховика, момент инерции которого при установке на кривошипном валу равен

$$I_M = I_{\Pi}^I - I_{\Pi}^0 = 84,2 - 5,3 = 78,9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## 2.11. Определение закона движения звена приведения

График  $\Delta T_I(\varphi_1)$  одновременно является приближенным графиком изменения угловой скорости  $\Delta\omega_1(\varphi_1)$  звена приведения, причем

$$\Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_{1cp}.$$

Линия средней угловой скорости  $\omega_{1cp}$  проходит посередине отрезка  $(ab)$ . Масштабный коэффициент угловой скорости

$$\mu_\omega = \frac{\omega_{1max} - \omega_{1min}}{ab} = \frac{\delta\omega_{1cp}}{ab} = \frac{0,1 \cdot 12,57}{66,5} = 0,0189 \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

Тогда для любого положения угловая скорость звена приведения (кривошипа 1)

$$\omega_1 = \omega_{1cp} + \Delta\omega_1 = \omega_{1cp} + y_{\Delta\omega} \cdot \mu_\omega,$$

где  $y_{\Delta\omega}$  – ордината графика  $\Delta\omega_1(\varphi_1)$ , измеряемая от линии средней угловой скорости  $\omega_{1cp}$  (с учетом знака).

Для положения 2

$$\omega_1 = 12,57 + (-22) \cdot 0,0189 = 12,15 \text{ рад/с.}$$

Для положения 11

$$\omega_1 = 12,57 + (-10) \cdot 0,0189 = 12,38 \text{ рад/с.}$$

Угловое ускорение  $\varepsilon_1$  определяется из дифференциального уравнения движения:



$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Pi}^{\Pi} - M_{\Pi}^C - \frac{\omega_1^2}{2} \cdot \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1}}{I_{\Pi}^I + I_{\Pi}^{II}},$$

где производная  $\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1}$  может быть получена методом графического дифференцирования:

$$\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1} = \frac{\mu_I}{\mu_{\varphi}} \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона касательной к графику  $I_{\Pi}^{II}(\varphi_1)$  в соответствующей точке.

Для положения 2

$$\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1} = \frac{0,01}{0,0349} \operatorname{tg} 77^{\circ} = 1,24 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{352 - 67,5 - \frac{12,15^2}{2} \cdot 1,24}{84,2 + 0,548} = 2,28 \text{ рад/с}^2.$$

Для положения 11

$$\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi_1} = \frac{0,01}{0,0349} \operatorname{tg} 112^{\circ} = -0,709 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{352 - 1799 - \frac{12,38^2}{2} \cdot (-0,709)}{84,2 + 1,084} = -16,3 \text{ рад/с}^2.$$

Так как  $\varepsilon_1 < 0$ , то направление  $\varepsilon_1$  в положении 11 противоположно направлению  $\omega_1$ .

## 2.12. Выводы

Из анализа динамического исследования машины установлено:

1. Для обеспечения вращения звена приведения с заданным коэффициентом неравномерности вращения  $\delta = 0,1$  необходимо, чтобы постоянная составляющая приведенного момента инерции  $I_{\Pi}^I$  была равна  $I_{\Pi}^I = 84,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .
2. Так как приведенный момент инерции всех вращающихся звеньев  $I_{\Pi}^I > I_{\Pi}^0$ , то на вал кривошипа необходимо установить маховик, момент инерции которого  $I_M = 78,9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .
3. После установки маховика получены значения угловой скорости  $\omega_1$  и углового ускорения  $\varepsilon_1$  в расчетных положениях.

### 3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

#### 3.1. Задачи динамического анализа механизма

Задачами динамического анализа механизма являются:

- 1) определение реакций в кинематических парах;
- 2) определение уравнивающего (движущего) момента, действующего на вал кривошипа со стороны привода.

При этом известен закон движения в виде зависимостей  $\omega_1(\varphi_1)$  и  $\varepsilon_1(\varphi_1)$ .

Указанные задачи решаются методом кинетостатики, который состоит в том, что уравнения движения записываются в форме уравнений равновесия (статики). Для этого к каждому подвижному звену механизма, наряду с реально действующими активными силами и реакциями связей, прикладываются силы инерции, после чего на основании принципа Даламбера составляются уравнения равновесия.

#### 3.2. Графический метод

##### 3.2.1. Кинематический анализ для положения 2

На основании п. 2.11 угловая скорость  $\omega_1 = 12,15$  рад/с и угловое ускорение  $\varepsilon_1 = 2,28$  рад/с<sup>2</sup>.

Скорость точки *A*

$$V_A = \omega_1 l_{OA} = 12,15 \cdot 0,1 = 1,215 \text{ м/с.}$$

Принимаем масштабный коэффициент  $\mu_V = 0,02 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$ .

Тогда отрезок, изображающий  $V_A$ , равен

$$\rho_a = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{1,215}{0,02} = 60,8 \text{ мм.}$$

Скорость  $\vec{V}_A \perp OA$  и направлена в сторону вращения кривошипа.

Скорость точки  $B$  находим путем построения плана скоростей согласно векторным уравнениям

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{B_0} + \vec{V}_{BB_0},$$

где  $\vec{V}_{BA} \perp AB$  – скорость точки  $B$  при вращении звена 2 относительно точки  $A$  (относительная скорость),  $\vec{V}_{B_0} = 0$  (точка  $B_0$  направляющих ползуна неподвижна),  $\vec{V}_{BB_0} \parallel y$  (вертикально).

Точку  $s_2$  на плане скоростей находим по теореме подобия:

$$\frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB}, \text{ откуда } as_2 = ab \cdot \frac{AS_2}{AB} = 56 \cdot 0,35 = 19,6 \text{ мм.}$$

Находим на плане проекции точки  $s_2 - s_{2x}$  и  $s_{2y}$ .

Из плана скоростей находим:

$$V_B = (pb) \cdot \mu_V = 37,5 \cdot 0,02 = 0,75 \text{ м/с};$$

$$V_{S_2} = (ps_2) \cdot \mu_V = 46,5 \cdot 0,02 = 0,93 \text{ м/с};$$

$$\dot{x}_{S_2} = (ps_{2x}) \cdot \mu_V = 35,5 \cdot 0,02 = 0,71 \text{ м/с};$$

$$\dot{y}_{S_2} = (ps_{2y}) \cdot \mu_V = 31 \cdot 0,02 = 0,62 \text{ м/с};$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab}{l_{AB}} \cdot \mu_V = \frac{56 \cdot 0,02}{0,42} = 2,67 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости  $\omega_2$  звена 2 получим, поместив вектор относительной скорости  $\vec{V}_{BA}$  (вектор  $a\bar{b}$ ) в точку  $B$  и рассматривая поворот точки  $B$  относительно точки  $A$ .

Переходим к построению плана ускорений.  
Ускорение точки  $A$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t,$$

где  $\bar{a}_A^n$  – нормальное ускорение точки  $A$ , направленное от точки  $A$  к точке  $O$ ;

$\bar{a}_A^t$  – касательное (тангенциальное) ускорение точки  $A$ , направленное перпендикулярно  $OA$  в сторону углового ускорения  $\varepsilon_1$ .

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} = 12,15^2 \cdot 0,1 = 14,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^t = |\varepsilon_1| l_{OA} = 2,28 \cdot 0,1 = 0,228 \text{ м/с}^2.$$

Принимаем масштабный коэффициент ускорений  $\mu_a = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}$

и находим отрезки, изображающие  $\bar{a}_A^n$  и  $\bar{a}_A^t$ :

$$\pi n_1 = \frac{a_A^n}{\mu_a} = \frac{14,8}{0,2} = 74 \text{ мм};$$

$$n_1 a = \frac{a_A^t}{\mu_a} = \frac{0,228}{0,2} = 1,1 \text{ мм}.$$

Ускорение точки  $B$  находим путем построения плана ускорений согласно векторным уравнениям:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_0} + \bar{a}_{BB_0},$$

где  $\bar{a}_{BA}^n$  – нормальное относительное ускорение точки  $B$  по отношению к точке  $A$ , направленное от точки  $B$  к точке  $A$ ;

$\bar{a}_{BA}^t$  – тангенциальное относительное ускорение, направленное перпендикулярно  $AB$ ;  $\bar{a}_{B_0} = 0$ ,  $\bar{a}_{BB_0} \parallel y$  (вертикально).

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = 2,67^2 \cdot 0,42 = 2,99 \text{ м/с}^2.$$

Отрезок, изображающий  $\bar{a}_{BA}^n$ , равен

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{2,99}{0,2} = 15 \text{ мм.}$$

Точку  $s_2$  на плане ускорений находим на основании теоремы подобия:

$$\frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB}, \text{ откуда } as_2 = ab \cdot \frac{AS_2}{AB} = 32 \cdot 0,35 = 11,2 \text{ мм.}$$

Находим на плане проекции точки  $s_2$  –  $s_{2x}$  и  $s_{2y}$ .

Из плана ускорений находим:

$$a_B = (\pi b) \cdot \mu_a = 76 \cdot 0,2 = 15,2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S_2} = (\pi s_2) \cdot \mu_a = 73 \cdot 0,2 = 14,6 \text{ м/с}^2;$$

$$\ddot{x}_{S_2} = (\pi s_{2x}) \cdot \mu_a = 20 \cdot 0,2 = 4 \text{ м/с}^2;$$

$$\ddot{y}_{S_2} = (\pi s_{2y}) \cdot \mu_a = 70 \cdot 0,2 = 14 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{n_2 b}{l_{AB}} \cdot \mu_a = \frac{28,5 \cdot 0,2}{0,42} = 13,6 \text{ рад/с}^2.$$

Направление углового ускорения  $\varepsilon_2$  звена 2 получим, поместив вектор тангенциального ускорения  $\bar{a}_{BA}^t$  (вектор  $n_2\bar{b}$ ) в точку  $B$  и рассматривая поворот точки  $B$  относительно точки  $A$ .

### 3.2.2. Кинематический анализ для положения 11

Расчет и построения выполняются аналогично.

$$\omega_1 = 12,38 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon_1 = -16,3 \text{ рад/с}^2.$$

$$V_A = \omega_1 l_{OA} = 12,38 \cdot 0,1 = 1,238 \text{ м/с}.$$

$$\rho_a = \frac{V_A}{\mu_V} = \frac{1,238}{0,02} = 61,9 \text{ мм}.$$

$$as_2 = ab \cdot \frac{AS_2}{AB} = 27 \cdot 0,35 = 9,5 \text{ мм}.$$

$$V_B = (pb) \cdot \mu_V = 59 \cdot 0,02 = 1,18 \text{ м/с}.$$

$$V_{S_2} = (ps_2) \cdot \mu_V = 59,5 \cdot 0,02 = 1,19 \text{ м/с}.$$

$$\dot{x}_{S_2} = (ps_{2x}) \cdot \mu_V = 17,5 \cdot 0,02 = 0,35 \text{ м/с}.$$

$$\dot{y}_{S_2} = (ps_{2y}) \cdot \mu_V = 57 \cdot 0,02 = 1,14 \text{ м/с}.$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab}{l_{AB}} \cdot \mu_V = \frac{27 \cdot 0,02}{0,42} = 1,29 \text{ рад/с}.$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} = 12,38^2 \cdot 0,1 = 15,3 \text{ м/с}^2.$$

$$a_A^t = |\varepsilon_1| l_{OA} = 16,3 \cdot 0,1 = 1,63 \text{ м/с}^2.$$

$$\pi n_1 = \frac{a_A^n}{\mu_a} = \frac{15,3}{0,2} = 76,5 \text{ мм}.$$

$$n_1 a = \frac{a_A^t}{\mu_a} = \frac{1,63}{0,2} = 8,2 \text{ мм.}$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB} = 1,29^2 \cdot 0,42 = 0,699 \text{ м/с}^2.$$

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{0,699}{0,2} = 3,5 \text{ мм.}$$

$$as_2 = ab \cdot \frac{AS_2}{AB} = 65,5 \cdot 0,35 = 22,9 \text{ мм.}$$

$$a_B = (\pi b) \cdot \mu_a = 36 \cdot 0,2 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{S_2} = (\pi s_2) \cdot \mu_a = 58 \cdot 0,2 = 11,6 \text{ м/с}^2.$$

$$\ddot{x}_{S_2} = (\pi s_{2x}) \cdot \mu_a = 43 \cdot 0,2 = 8,6 \text{ м/с}^2.$$

$$\ddot{y}_{S_2} = (\pi s_{2y}) \cdot \mu_a = 39 \cdot 0,2 = 7,8 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{AB}} = \frac{n_2 b}{l_{AB}} \cdot \mu_a = \frac{65,5 \cdot 0,2}{0,42} = 31,2 \text{ рад/с}^2.$$

### 3.2.3. Силовой анализ для положения 2

Определяем силы и моменты сил инерции звеньев:

$$F_{И1} = m_1 a_{S1} = 0,$$

так как  $a_{S1} = 0$ , (центр масс  $S_1$  находится на оси вращения и является неподвижным);

$$F_{И2} = m_2 a_{S2} = 29,4 \cdot 14,6 = 429 \text{ Н;}$$

$$F_{И3} = m_3 a_B = 88,2 \cdot 15,2 = 1341 \text{ Н;}$$



$$M_{И1} = I_{\Pi}^I |\varepsilon_1| = 84,2 \cdot 2,28 = 192 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{И2} = I_{S2} \varepsilon_2 = 0,882 \cdot 13,6 = 12 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Силы инерции приложены в центрах масс и направлены противоположно ускорениям центров масс звеньев. Моменты сил инерции направлены противоположно угловым ускорениям звеньев.

Отделяем от механизма статически определимую структурную группу (2,3). В точке  $B$  приложена реакция  $\bar{F}_{30} \perp y$ , а в точке  $A$  – реакция  $\bar{F}_{21}$ , которую раскладываем на нормальную составляющую  $\bar{F}_{21}^n$ , направленную вдоль звена  $AB$ , и тангенциальную составляющую  $\bar{F}_{21}^t$ , направленную перпендикулярно  $AB$ .

Составляющую  $\bar{F}_{21}^t$  находим из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно точки  $B$ :

$$\Sigma M_B = 0 \quad \text{или} \quad \Sigma M_B = \frac{M_{И2}}{\mu_S} + F_{И2} h_{И2} + G_2 h_2 - F_{21}^t AB = 0,$$

откуда

$$F_{21}^t = \frac{\frac{M_{И2}}{\mu_S} + F_{И2} h_{И2} + G_2 h_2}{AB} = \frac{\frac{12}{0,002} + 429 \cdot 66 + 288 \cdot 28}{210} = 202 \text{ Н}.$$

Плечи сил  $h_{И2}$ ,  $h_2$ ,  $AB$  берутся непосредственно из чертежа измерением в миллиметрах.

**Примечание.** Если окажется, что  $\bar{F}_{21}^t < 0$ , то первоначально принятое направление  $\bar{F}_{21}^t$  следует изменить на противоположное.

Составляющую  $\bar{F}_{21}^n$ , полную реакцию  $\bar{F}_{21}$  и реакцию  $\bar{F}_{30}$  находим путем построения плана сил согласно уравнению равновесия группы, записанному в соответствии с принципом Даламбера:

$$\bar{F}_{21}^n + \bar{F}_{21}^t + \bar{F}_{и2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{и3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{30} = 0.$$

Принимаем масштабный коэффициент сил  $\mu_F = 20$  Н/мм и находим отрезки, изображающие все известные силы:

$$[1-2] = \frac{F_{21}^t}{\mu_F} = \frac{202}{20} = 10,1 \text{ мм}, \quad [2-3] = \frac{F_{и2}}{\mu_F} = \frac{429}{20} = 21,5 \text{ мм},$$

$$[3-4] = \frac{G_2}{\mu_F} = \frac{288}{20} = 14,4 \text{ мм}, \quad [4-5] = \frac{F_{и3}}{\mu_F} = \frac{1341}{20} = 67,1 \text{ мм},$$

$$[5-6] = \frac{G_3}{\mu_F} = \frac{865}{20} = 43,3 \text{ мм}.$$

В соответствии с векторным уравнением последовательно откладываем отрезки  $[1-2]$ ,  $[2-3]$ , и т. д. в направлении соответствующих сил. Затем из точки 1 проводим направление реакции  $\bar{F}_{21}^n$ , а из точки 6 – направление реакции  $\bar{F}_{30}$ . В пересечении этих направлений получаем точку 7, и многоугольник сил оказывается замкнутым.

Из плана сил находим:

$$F_{21}^n = [7-1] \mu_F = 148 \cdot 20 = 2960 \text{ Н},$$

$$F_{21} = [7-2] \mu_F = 148,5 \cdot 20 = 2970 \text{ Н},$$

$$F_{30} = [6-7] \mu_F = 25,5 \cdot 20 = 510 \text{ Н}.$$

Реакцию  $\bar{F}_{23}$ , действующую на звено 2 со стороны звена 3, определяем из уравнения равновесия звена 2, используя при этом построенный план сил группы:

$$\overline{F}_{21}^n + \overline{F}_{21}^t + \overline{F}_{И2} + \overline{G}_2 + \overline{F}_{23} = 0.$$

$$F_{23} = [4 - 7] \mu_F = 113 \cdot 20 = 2260 \text{ Н.}$$

Далее рассматриваем начальное звено – кривошип 1. В точке *A* приложена реакция  $\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$ , а в точке *O* – реакция  $\overline{F}_{10}$ , которую находим путем построения плана сил согласно уравнению равновесия:

$$\overline{F}_{12} + \overline{G}_1 + \overline{F}_{10} = 0.$$

$$[1 - 2] = \frac{F_{12}}{\mu_F} = \frac{2970}{20} = 148,5 \text{ мм}, \quad [2 - 3] = \frac{G_1}{\mu_F} = \frac{491}{20} = 24,6 \text{ мм.}$$

Тогда

$$F_{10} = [3 - 1] \mu_F = 171 \cdot 20 = 3420 \text{ Н.}$$

Уравновешивающий (движущий) момент  $M_y$  находим из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 1, относительно точки *O*:

$$\Sigma M_O = F_{12} h_1 \mu_S + M_{И1} - M_y = 0,$$

откуда

$$M_y = F_{12} h_1 \mu_S + M_{И1} = 2970 \cdot 26,5 \cdot 0,002 + 192 = 349,41 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

### 3.2.4. Силовой анализ для положения 11

Расчет и построения выполняются аналогично.

$$F_{И1} = m_1 a_{S1} = 0.$$

$$F_{И2} = m_2 a_{S2} = 29,4 \cdot 11,6 = 341 \text{ Н.}$$

$$F_{И3} = m_3 a_B = 88,2 \cdot 7,2 = 635 \text{ Н.}$$

$$M_{И1} = I_{\Pi}^I |\varepsilon_1| = 84,2 \cdot 16,3 = 1372 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$M_{И2} = I_{S_2} \varepsilon_2 = 0,882 \cdot 31,2 = 27,5 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$\sum M_B = \frac{M_{И2}}{\mu_S} + F_{И2} h_{И2} + G_2 h_2 - F_{21}^t AB = 0.$$

$$F_{21}^t = \frac{\frac{M_{И2}}{\mu_S} + F_{И2} h_{И2} + G_2 h_2}{AB} = \frac{\frac{27,5}{0,002} + 341 \cdot 105 + 288 \cdot 17}{210} = 259 \text{ Н.}$$

$$\bar{F}_{21}^n + \bar{F}_{21}^t + \bar{F}_{И2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{И3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{30} = 0.$$

Масштабный коэффициент сил  $\mu_F = 100 \text{ Н/мм.}$

$$[1-2] = \frac{F_{21}^t}{\mu_F} = \frac{259}{100} = 2,6 \text{ мм,} \quad [2-3] = \frac{F_{И2}}{\mu_F} = \frac{341}{100} = 3,4 \text{ мм,}$$

$$[3-4] = \frac{G_2}{\mu_F} = \frac{288}{100} = 2,9 \text{ мм,} \quad [4-5] = \frac{F_{И3}}{\mu_F} = \frac{635}{100} = 6,4 \text{ мм,}$$

$$[5-6] = \frac{G_3}{\mu_F} = \frac{865}{100} = 8,7 \text{ мм,} \quad [6-7] = \frac{F_3}{\mu_F} = \frac{20\,000}{100} = 200 \text{ мм.}$$

$$F_{21}^n = [8-1] \mu_F = 181 \cdot 100 = 18\,100 \text{ Н.}$$

$$F_{21} = [8-2] \mu_F = 181,5 \cdot 100 = 18\,150 \text{ Н.}$$

$$F_{30} = [7-8] \mu_F = 22 \cdot 100 = 2200 \text{ Н.}$$

$$F_{23} = [4 - 8] \mu_F = 186 \cdot 100 = 18\,600 \text{ Н.}$$

$$\bar{F}_{12} + \bar{G}_1 + \bar{F}_{10} = 0.$$

$$[1 - 2] = \frac{F_{12}}{\mu_F} = \frac{18\,150}{100} = 181,5 \text{ мм}, \quad [2 - 3] = \frac{G_1}{\mu_F} = \frac{491}{100} = 4,9 \text{ мм.}$$

$$F_{10} = [3 - 1] \mu_F = 176,5 \cdot 100 = 17\,650 \text{ Н.}$$

$$\sum M_0 = F_{12} h_1 \mu_S - M_{И1} - M_y = 0.$$

$$M_y = F_{12} h_1 \mu_S - M_{И1} = 18\,150 \cdot 47,5 \cdot 0,002 - 1372 = 352 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

### 3.3. Аналитический метод

#### 3.3.1. Кинематический анализ

В соответствии с алгоритмом расчета, приведенным в пособии [1], выполняем расчет скоростей и ускорений точек и звеньев для контрольного положения 11. При этом используем результаты, полученные в п. 2.3.3.

$$\omega_2 = i_{21} \omega_1 = -0,1036 \cdot 12,38 = -1,283 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = i_{31} \omega_1 = -0,0954 \cdot 12,38 = -1,181 \text{ м/с.}$$

$$\dot{x}_{S_2} = x_{S_2}' \omega_1 = 0,0281 \cdot 12,38 = 0,348 \text{ м/с.}$$

$$\dot{y}_{S_2} = y_{S_2}' \omega_1 = -0,092 \cdot 12,38 = 1,139 \text{ м/с.}$$

$$\varepsilon_2 = i_{21}' \omega_1^2 + i_{21} \varepsilon_1 = -0,215 \cdot 12,38^2 + (-0,1036) \cdot (-16,3) = -31,2 \text{ рад/с}^2.$$

$$a_B = i_{31}' \omega_1^2 + i_{31} \varepsilon_1 = 0,0369 \cdot 12,38^2 + (-0,0954) \cdot (-16,3) = 7,21 \text{ м/с}^2.$$

$$\ddot{x}_{S_2} = x_{S_2}'' \omega_1^2 + x_{S_2}' \varepsilon_1 = 0,0586 \cdot 12,38^2 + 0,0281 \cdot (-16,3) = 8,52 \text{ м/с}^2.$$

$$\ddot{y}_{S_2} = y_{S_2}'' \omega_1^2 + y_{S_2}' \varepsilon_1 = 0,041 \cdot 12,38^2 + (-0,092) \cdot (-16,3) = 7,78 \text{ м/с}^2.$$

$$V_{S_2} = \sqrt{\dot{x}_{S_2}^2 + \dot{y}_{S_2}^2} = \sqrt{0,348^2 + 1,139^2} = 1,19 \text{ м/с}.$$

$$a_{S_2} = \sqrt{\ddot{x}_{S_2}^2 + \ddot{y}_{S_2}^2} = \sqrt{8,52^2 + 7,78^2} = 11,5 \text{ м/с}^2.$$

### 3.3.2. Силовой анализ

В соответствии с алгоритмом расчета, приведенным в пособии [1], выполняем силовой анализ для контрольного положения 11. Расчетные схемы для силового анализа структурной группы (2,3) и кривошипа 1 приведены на рис. 3.1. При этом используются результаты, полученные в п. 2.3.3.

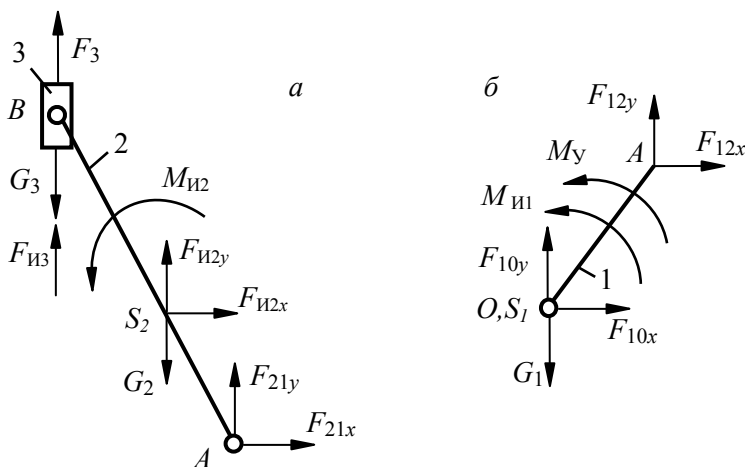


Рис. 3.1. Расчетные схемы для силового анализа структурной группы (2,3) и кривошипа 1

1.  $M_{И1} = -I_{\Pi}^I \varepsilon_1 = -84,2 \cdot (-16,3) = 1372 \text{ Н} \cdot \text{м}.$
2.  $F_{И2x} = -m_2 \ddot{x}_{S_2} = -29,4 \cdot 8,52 = -250 \text{ Н}.$
3.  $F_{И2y} = -m_2 \ddot{y}_{S_2} = -29,4 \cdot 7,78 = -229 \text{ Н}.$
4.  $F_{И3} = -m_3 a_B = -88,2 \cdot 7,21 = -636 \text{ Н}.$
5.  $M_{И2} = -I_{S_2} \varepsilon_2 = -0,882 \cdot (-31,2) = 27,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$
6.  $F_{21y} = -(F_{И2y} + F_{И3} + F_3) + G_2 + G_3 =$   
 $= -(-229 - 636 + 20\,000) + 288 + 865 = -17\,982 \text{ Н}.$
7.  $F_{21x} = [(x_A - x_B)F_{21y} + (x_{S_2} - x_B)(F_{И2y} - G_2) - (y_{S_2} - y_B) \times$   
 $\times F_{И2x} + M_{И2}] / (y_A - y_B) = [(-0,09018 + 0,04) \cdot (-17\,982) + (-0,07261 +$   
 $+ 0,04) \cdot (-229 - 288) - (-0,1892 + 0,4602) \cdot (-250) + 27,5] / (-0,04321 +$   
 $+ 0,4602) = 2422 \text{ Н}.$
8.  $F_{30} = -F_{21x} - F_{И2y} = -2422 + 229 = -2193 \text{ Н}.$
9.  $F_{12x} = -F_{21x} = -2422 \text{ Н}.$
10.  $F_{12y} = -F_{21y} = 17\,982 \text{ Н}.$
11.  $F_{23x} = -F_{21x} - F_{И2x} = -2422 + 250 = -2172 \text{ Н}.$
12.  $F_{23y} = -F_{21y} - F_{И2y} + G_2 = 17\,982 + 229 + 288 = 18\,499 \text{ Н}.$
13.  $M_y = -x_A F_{12y} + y_A F_{12x} - M_{И1} = 0,09018 \cdot 17982 - 0,04321 \times$   
 $\times (-2422) - 1372 = 354 \text{ Н} \cdot \text{м}.$
14.  $F_{10x} = -F_{12x} = 2422 \text{ Н}.$
15.  $F_{10y} = -F_{12y} + G_1 = -17\,982 + 491 = -17\,491 \text{ Н}.$
16.  $F_{10} = \sqrt{F_{10x}^2 + F_{10y}^2} = \sqrt{2422^2 + (-17\,491)^2} = 17\,658 \text{ Н}.$
17.  $F_{21} = \sqrt{F_{21x}^2 + F_{21y}^2} = \sqrt{2422^2 + (-17982)^2} = 18\,144 \text{ Н}.$
18.  $F_{23} = \sqrt{F_{23x}^2 + F_{23y}^2} = \sqrt{(-2172)^2 + 18\,499^2} = 18\,626 \text{ Н}.$

Сопоставление результатов расчетов для положения 11 приведено в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Сопоставление результатов силового расчета  
для положения 11

Параметр	Ед. изм.	Графический метод	Аналитический метод
$F_{10}$	Н	17650	17658
$F_{21}$	Н	18150	18144
$F_{23}$	Н	2200	–2193
$F_{30}$	Н	18600	18626
$M_y$	Н·м	352	354



## 4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА

### 4.1. Задачи проектирования

Задачами проектирования кулачкового механизма являются:

- 1) определение основных размеров из условия ограничения угла давления;
- 2) построение профиля кулачка, обеспечивающего заданный закон движения толкателя.

**Примечание.** Для механизма с тарельчатым толкателем основные размеры определяются из условия выпуклости профиля кулачка.

### 4.2. Определение кинематических характеристик

Фазовые углы поворота кулачка

$$\varphi_Y = 80^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 80 = 1,3963 \text{ рад};$$

$$\varphi_{ДС} = 20^\circ;$$

$$\varphi_B = 80^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 80 = 1,3963 \text{ рад}.$$

Для определения перемещения толкателя  $S$ , аналога скорости толкателя  $S'$ , аналога ускорения толкателя  $S''$  используем аналитические зависимости [2] для соответствующих законов движения. Так как на фазе удаления толкатель движется по треугольному закону, то расчетные формулы имеют вид:

$$S'' = \begin{cases} 32k \frac{h}{\varphi_Y^2} & \text{при } 0 \leq k \leq 0,25, \\ 16(1-2k) \frac{h}{\varphi_Y^2} & \text{при } 0,25 \leq k \leq 0,75, \\ 32(k-1) \frac{h}{\varphi_Y^2} & \text{при } 0,75 \leq k \leq 1. \end{cases}$$

$$S_y' = \begin{cases} 16k^2 \frac{h}{\varphi_y} & \text{при } 0 \leq k \leq 0,25, \\ \left[ 16k(1-k) - 2 \right] \frac{h}{\varphi_y} & \text{при } 0,25 \leq k \leq 0,75, \\ 16(1-k)^2 \frac{h}{\varphi_y} & \text{при } 0,75 \leq k \leq 1. \end{cases}$$

$$S_y = \begin{cases} \frac{16k^3h}{3} & \text{при } 0 \leq k \leq 0,25, \\ \left[ \frac{1}{6} - 2k(1-4k) - \frac{16k^3}{3} \right] h & \text{при } 0,25 \leq k \leq 0,75, \\ \left[ 1 - \frac{16(1-k)^3}{3} \right] h & \text{при } 0,75 \leq k \leq 1, \end{cases}$$

где  $k = \frac{\varphi_i}{\varphi_y}$  – позиционный коэффициент (отношение текущего угла

поворота кулачка  $\varphi_i$  к фазовому углу  $\varphi_y$ ), изменяющийся от 0 до 1.

На фазе возвращения (косинусоидальный закон изменения аналога ускорения толкателя):

$$S_B'' = \frac{\pi^2 h}{2\varphi_B^2} \cos(\pi k);$$

$$S_B' = -\frac{\pi h}{2\varphi_B} \sin(\pi k);$$

$$S_B = \frac{h}{2} [1 - \cos(\pi k)],$$

где  $k = \frac{\varphi_i}{\varphi_B}$  – позиционный коэффициент ( $0 \leq k \leq 1$ ), причем на фазе

возвращения отсчет коэффициента  $k$  должен производиться с конца фазы. Значения углов  $\varphi_Y$  и  $\varphi_B$  подставляются в радианах.

Выполняем расчет кинематических характеристик для положений  $i = 6$  и  $i = 15$ .

Для положения 6 (фаза удаления):

$$\varphi_6 = \frac{\varphi_Y}{8}(i-1) = \frac{80}{8}(6-1) = 50^\circ,$$

$$k_6 = \frac{i-1}{8} = \frac{6-1}{8} = 0,625.$$

При  $k_6 = 0,625$  используется формула для участка  $0,25 \leq k \leq 0,75$ :

$$S_6^{//} = \frac{16 \cdot 0,06(1 - 2 \cdot 0,625)}{1,3963^2} = -0,1231 \text{ м},$$

$$S_6' = \frac{0,06 [16 \cdot 0,625(1 - 0,625) - 2]}{1,3963} = 0,0752 \text{ м},$$

$$S_6 = 0,06 \left[ \frac{1}{6} - 2 \cdot 0,625 \cdot (1 - 4 \cdot 0,625) - \frac{16 \cdot 0,625^3}{3} \right] = 0,04437 \text{ м}.$$

Для положения 15 (фаза возвращения):

$$\varphi_{15} = \varphi_Y + \varphi_{ДС} + \frac{\varphi_B}{8}(i-10) = 80 + 20 + \frac{80}{8}(15-10) = 150^\circ,$$

$$k_{15} = \frac{18-i}{8} = \frac{18-15}{8} = 0,375,$$

$$S_{15}'' = \frac{\pi^2 \cdot 0,06}{2 \cdot 1,3963^2} \cos(\pi \cdot 0,375) = 0,05812 \text{ м};$$

$$S_{15}' = -\frac{\pi \cdot 0,06}{2 \cdot 1,3963} \sin(\pi \cdot 0,375) = -0,06236 \text{ м};$$

$$S_{15} = \frac{0,06}{2} [1 - \cos(\pi \cdot 0,375)] = 0,01852 \text{ м}.$$

Результаты определения  $S''$ ,  $S'$ ,  $S$  приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Результаты определения кинематических характеристик  $S''$ ,  $S'$ ,  $S$

Фаза	№ пол.	$k$	$\varphi$		$S''$ , м	$S'$ , м	$S$ , м
			град	рад			
удаления	1	0	0	0	0	0	0
	2	1/8	10	0,1745	0,1231	0,01074	0,00063
	3	2/8	20	0,3491	0,2462	0,04297	0,005
	4	3/8	30	0,5236	0,1231	0,07520	0,01563
	5	4/8	40	0,6981	0	0,08594	0,03
	6	5/8	50	0,8727	-0,1231	0,07520	0,04437
	7	6/8	60	1,0472	-0,2462	0,04297	0,055
	8	7/8	70	1,2217	-0,1231	0,01074	0,05937
	9	1	80	1,3963	0	0	0,06
возвращения	10	1	80	1,3963	-0,1519	0	0,06
	11	7/8	70	1,2217	-0,1403	-0,0258	0,05772
	12	6/8	60	1,0472	-0,1074	-0,0477	0,05121
	13	5/8	50	0,8727	-0,0581	-0,0624	0,04148
	14	4/8	40	0,6981	0	-0,0675	0,03
	15	3/8	30	0,5236	0,0581	-0,0624	0,01852
	16	2/8	20	0,3491	0,1074	-0,0477	0,00879
	17	1/8	10	0,1745	0,1403	-0,0258	0,00228
	18	0	0	0	0,1519	0	0

Для построения графиков  $S(\varphi_1)$ ,  $S'(\varphi_1)$ ,  $S''(\varphi_1)$  принимаем масштабные коэффициенты  $\mu_S = \mu_{S'} = 0,001$  м/мм и  $\mu_{S''} = 0,003$  м/мм.

**Примечание.** Равенство коэффициентов  $\mu_S = \mu_{S'}$  обязательно для последующих построений.

Тогда ординаты графиков вычисляются как

$$y_{S''} = \frac{S''}{\mu_{S''}}; \quad y_{S'} = \frac{S'}{\mu_{S'}}; \quad y_S = \frac{S}{\mu_S}.$$

Например, для положения 6

$$y_{S''_6} = \frac{S''_6}{\mu_{S''}} = -\frac{0,1231}{0,003} = -41 \text{ мм};$$

$$y_{S'_6} = \frac{S'_6}{\mu_{S'}} = \frac{0,0752}{0,001} = 75,2 \text{ мм};$$

$$y_{S_6} = \frac{S_6}{\mu_S} = \frac{0,04437}{0,001} = 44,4 \text{ мм}.$$

Результаты определения ординат графиков для всех положений приведены в табл. 4.2, на основании которой построены графики.

Отрезок [1–18], изображающий на графиках рабочий угол  $\varphi_P = \varphi_U + \varphi_{ДС} + \varphi_B = 80 + 20 + 80 = 180^\circ$ , принимаем равным 270 мм. Тогда масштабный коэффициент

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_P}{[1-18]} = \frac{180}{270} = 0,6667 \text{ град/мм},$$

а отрезки, изображающие на графиках фазовые углы, соответственно равны:

$$[1-9] = \frac{\varphi_Y}{\mu_\varphi} = \frac{80}{0,6667} = 120 \text{ мм};$$

$$[9-10] = \frac{\varphi_{ДС}}{\mu_\varphi} = \frac{20}{0,6667} = 30 \text{ мм};$$

$$[10-18] = \frac{\varphi_B}{\mu_\varphi} = \frac{80}{0,6667} = 120 \text{ мм}.$$

**Примечание.** Если интервал  $[9-10]$ , соответствующий углу  $\varphi_{ДС}$ , получается большим, то на графиках его можно изобразить с разрывом.

Таблица 4.2

Результаты определения ординат графиков  
кинематических характеристик

№ пол.	$y_{S//}$ , мм	$y_{S'}$ , мм	$y_S$ , мм
1	0	0	0
2	41,0	10,7	0,6
3	82,1	43,0	5,0
4	41,0	75,2	15,6
5	0	85,9	30,0
6	-41,0	75,2	44,4
7	-82,1	43,0	55,0
8	-41,0	10,7	59,4
9	0	0	60,0
10	-50,6	0	60,0
11	-46,8	-25,8	57,7
12	-35,8	-47,7	51,2
13	-19,4	-62,4	41,5
14	0	-67,5	30,0
15	19,4	-62,4	18,5
16	35,8	-47,7	8,8
17	46,8	-25,8	2,3
18	50,6	0	0

### 4.3. Определение основных размеров кулачкового механизма

#### 4.3.1. Графический метод

Минимальный радиус-вектор  $r_0$  центрального профиля кулачка и эксцентриситет (смещение)  $e$  толкателя определяются из условия, что угол давления  $\theta$  в проектируемом механизме во всех положениях не должен превышать максимально допустимой величины  $\theta_{\max} = 30^\circ$ .

Решение указанной задачи выполняем графическим методом. Для этого на основании графиков  $S(\varphi_1)$  и  $S'(\varphi_1)$  строим совмещенную диаграмму  $S'(S)$ , при этом ординаты  $S'$  откладываются повернутыми на  $90^\circ$  в сторону вращения кулачка. К построенным кривым слева и справа проводим касательные под углом  $\theta_{\max} = 30^\circ$  к оси  $S$ . Ниже точки пересечения этих касательных находится зона, в которой можно выбирать центр вращения кулачка из условия  $\theta_i \leq \theta_{\max}$ . Наименьшие габариты механизма получаются, если центр вращения выбрать в точке пересечения касательных. Из чертежа находим

$$r_0 = OA_1 \cdot \mu_S = 110 \cdot 0,001 = 0,11 \text{ м};$$

$$e = OB \cdot \mu_S = 9 \cdot 0,001 = 0,009 \text{ м}.$$

**Примечание.** По указанию руководителя проекта можно использовать упрощенную диаграмму  $S'(S)$ , на которой изображаются только повернутые ординаты  $S'_{y\max}$  и  $|S'_{B\max}|$ . Так, при заданных законах движения толкателя

$$S'_{y\max} = \frac{2h}{\varphi_y} = \frac{2 \cdot 0,06}{1,3963} = 0,08594 \text{ м},$$

$$|S'_{B\max}| = \frac{\pi h}{2\varphi_B} = \frac{\pi \cdot 0,06}{2 \cdot 1,3963} = 0,0675 \text{ м}.$$

### 4.3.2. Аналитический метод

Используем зависимости, приведенные в пособии [2].

Смещение (эксцентриситет) толкателя

$$e = 0,5k \left[ S'_{y_{\max}} - \left| S'_{B_{\max}} \right| - (S_A - S_B) \operatorname{tg} \theta_{\max} \right],$$

где  $k = +1$ , если кулачок вращается против часовой стрелки, и  $k = -1$ , если по часовой стрелке;

$S_A$  и  $S_B$  – перемещения толкателя при  $S' = S'_{y_{\max}}$  и  $S' = \left| S'_{B_{\max}} \right|$ .

В случае симметричных законов  $S_A = S_B = 0,5h = 0,5 \cdot 0,06 = 0,03$  м.

$$e = 0,5 \cdot (-1) \left[ 0,08594 - 0,0675 - (0,03 - 0,03) \operatorname{tg} 30^\circ \right] = -0,0092 \text{ м.}$$

Так как  $e < 0$ , то толкатель расположен слева от центра вращения кулачка.

$$S_0 = 0,5 \left( \frac{S'_{y_{\max}} + \left| S'_{B_{\max}} \right|}{\operatorname{tg} \theta_{\max}} - S_A - S_B \right) = 0,5 \left( \frac{0,08594 + 0,0675}{\operatorname{tg} 30^\circ} - 0,03 - 0,03 \right) = 0,103 \text{ м.}$$

Минимальный радиус-вектор центрального профиля кулачка

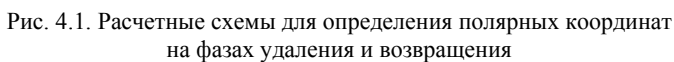
$$r_0 = \sqrt{S_0^2 + e^2} = \sqrt{0,103^2 + (-0,0092)^2} = 0,1034 \text{ м.}$$

### 4.4. Определение полярных координат центрального профиля кулачка

Используем зависимости, приведенные в пособии [2].

Расчетная схема для определения полярных координат  $(r_0, \alpha)$  на фазе удаления приведена на рис. 4.1. а, на фазе возвращения – на рис. 4.1, б.




$$r_i = \sqrt{(S_0 + S_i)^2 + e^2}, \text{ где } S_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}.$$
$$\alpha_i = \varphi_i - k \beta_i,$$

57

$$\beta_i = \operatorname{arctg} \frac{S_0 + S_i}{e} - \operatorname{arctg} \frac{S_0}{e}.$$

Выполняем расчет для положений 6 и 15. Значения  $S_i$  берутся из табл. 4.1. Для положения 6

$$S_0 = \sqrt{0,11^2 - (-0,009)^2} = 0,1096 \text{ м.}$$

$$r_6 = \sqrt{(0,1096 + 0,04437)^2 + (-0,009)^2} = 0,154 \text{ м.}$$

$$\beta_6 = \operatorname{arctg} \frac{0,1096 + 0,04437}{-0,009} - \operatorname{arctg} \frac{0,1096}{-0,009} = -1,35^\circ.$$

$$\alpha_6 = 50 - (-1)(-1,35) = 48,65^\circ.$$

Для положения 15

$$r_{15} = \sqrt{(0,1096 + 0,01852)^2 + (-0,009)^2} = 0,128 \text{ м.}$$

$$\beta_{15} = \operatorname{arctg} \frac{0,1096 + 0,01852}{-0,009} - \operatorname{arctg} \frac{0,1096}{-0,009} = -0,68^\circ.$$

$$\alpha_{15} = 150 - (-1)(-0,68) = 149,32^\circ.$$

#### 4.5. Определение углов давления

Угол давления в каждом положении механизма определяется из зависимости [2]

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{S_i' - k \cdot e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + S_i},$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий направление вращения кулачка (см. п. 4.3.2). Смещение  $e$  берется со знаком «плюс», если толкатель расположен справа от центра вращения кулачка, или со знаком «минус», если толкатель расположен слева.

Для положения 6

$$\operatorname{tg} \theta_6 = \frac{0,0752 - (-1)(-0,009)}{\sqrt{0,11^2 - (-0,009)^2} + 0,04437} = 0,4298, \quad \theta_6 = 23,3^\circ.$$

Для положения 15

$$\operatorname{tg} \theta_{15} = \frac{-0,0624 - (-1)(-0,009)}{\sqrt{0,11^2 - (-0,009)^2} + 0,01852} = -0,5572, \quad \theta_{15} = -29,1^\circ.$$

Результаты определения угла давления  $\theta$  для всех положений приведены в табл. 4.3. Для построения графика  $\theta(\varphi_1)$  принимаем масштабный коэффициент  $\mu_\theta = 1$  град/мм. Тогда ординаты графика вычисляются как

$$y_\theta = \frac{\theta}{\mu_\theta}.$$

Например, для положения 6

$$y_{\theta(6)} = \frac{23,3}{1} = 23,3 \text{ мм.}$$

Результаты определения ординат  $y_\theta$  для всех положений механизма приведены в табл. 4.3, на основании которой построен график  $\theta(\varphi_1)$ .

Таблица 4.3

Результаты определения углов давления и его ординат  $y_\theta$ 

№ пол.	$\theta$ , град	$y_\theta$ , мм	№ пол.	$\theta$ , град	$y_\theta$ , мм
1	-4,7	-4,7	10	-3,0	-3,0
2	0,9	0,9	11	-11,8	-11,8
3	16,5	16,5	12	-19,4	-19,4
4	27,9	27,9	13	-25,3	-25,3
5	28,9	28,9	14	-28,7	-28,7
6	23,3	23,3	15	-29,1	-29,1
7	11,7	11,7	16	-25,6	-25,6
8	0,6	0,6	17	-17,3	-17,3
9	-3,0	-3,0	18	-4,7	-4,7

#### 4.6. Построение профиля кулачка

Используем графический способ построения центрального профиля кулачка по точкам, применяя метод обращения движения. В соответствии с этим методом кулачок в обращенном движении остается неподвижным, а толкатель обкатывается по кулачку, вращаясь в направлении, противоположном вращению кулачка, и все время касаясь окружности радиуса  $e$ .

Проводим две окружности радиуса  $e$  и  $r_0$  и вертикальную касательную к окружности радиуса  $e$  (линию движения толкателя). В соответствии с графиком  $S(\varphi_1)$  наносим разметку хода толкателя  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$  для фазы удаления. От луча  $OA_9$  в направлении, противоположном действительному вращению кулачка, откладываем фазовые углы поворота кулачка  $\varphi_U, \varphi_{ДС}, \varphi_B$ . Дугу, соответствующую углу  $\varphi_U$ , делим на 8 равных частей в соответствии с графиком  $S(\varphi_1)$  и получаем точки 1, 2, 3, ..., 9, через которые проводим касательные к окружности радиуса  $e$ . Затем радиусами  $OA_1, OA_2, OA_3, \dots, OA_9$  проводим дуги до пересечения с соот-

ветствующими касательными в точках  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ , ...,  $9'$ , которые являются положениями центра ролика в обращенном движении. Соединяя отмеченные точки плавной кривой, получаем центральный профиль кулачка для фазы удаления.

Для фазы возвращения все построения выполняются аналогичным образом.

Профиль дальнего стояния очерчивается по дуге окружности радиуса  $r_{\max} = OA_9$ , а профиль ближнего стояния – по дуге окружности  $r_0$ .

Радиус ролика выбирается с учетом двух условий:

1)  $r_p \leq 0,4r_0$  (конструктивное условие);

2)  $r_p \leq 0,7\rho_{\min}$  (условие отсутствия заострения действительного профиля кулачка), где  $\rho_{\min}$  – минимальный радиус кривизны выпуклых участков центрального профиля кулачка. Радиус  $\rho_{\min}$  определяется с помощью следующего построения. В зоне наибольшей кривизны центрального профиля отмечаем точку. Вблизи от нее на равном расстоянии отмечаем еще две точки и соединяем их с первой точкой хордами. Через середины полученных хорд проводим к ним перпендикуляры, пересекающиеся в точке, которая является центром окружности, проходящей через все три точки. Радиус этой окружности приближенно можно принять за  $\rho_{\min}$ .

Тогда

$$\rho_{\min} = 67 \cdot \mu_s = 67 \cdot 0,001 = 0,067 \text{ м};$$

$$r_p \leq 0,4r_0 = 0,4 \cdot 0,11 = 0,044 \text{ м};$$

$$r_p \leq 0,7\rho_{\min} = 0,7 \cdot 0,067 = 0,047 \text{ м}.$$

Принимаем радиус ролика  $r_p = 0,04 \text{ м}$ .

Действительный профиль кулачка строим в виде эквидистантной кривой по отношению к центральному профилю. Для ее построения из точек центрального профиля описываем ряд дуг радиусом  $r_p$ . Оги-

бающая всех этих дуг и представляет собой действительный профиль кулачка.

#### **4.7. Выводы**

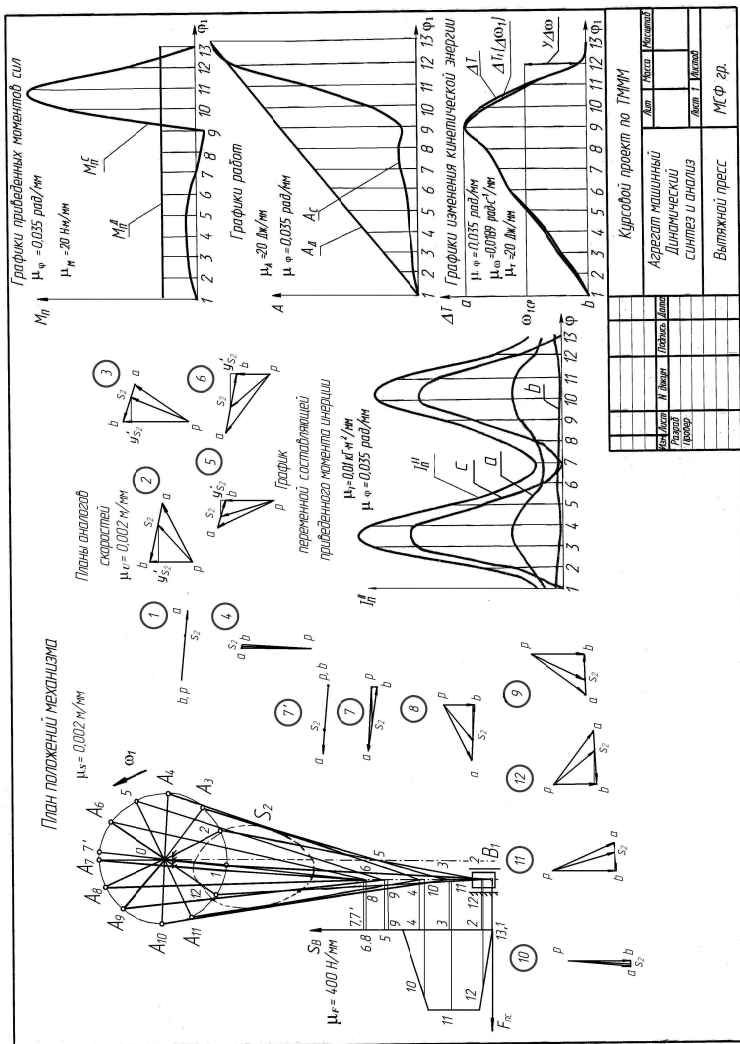
Спроектирован кулачковый механизм минимальных размеров, обеспечивающий движение толкателя по заданным законам. Угол давления во всех положениях не превышает заданного допускаемого угла  $\theta_{\max}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Динамика машин и механизмов в установившемся режиме движения / П. П. Анципорович [и др.]. – 2-е изд. – Минск : БНТУ, 2014. – 41 с.
2. Синтез кулачковых механизмов / П. П. Анципорович [и др.]. – 4-е изд. – Минск : БНТУ, 2013. – 80 с.
3. Анципорович, П. П. Теория механизмов и машин: методическое пособие по курсовому проектированию для студентов инженерно-технических специальностей / П. П. Анципорович, В. К. Акулич, Е. М. Дубовская. – Минск : БНТУ, 2014. – 59 с.

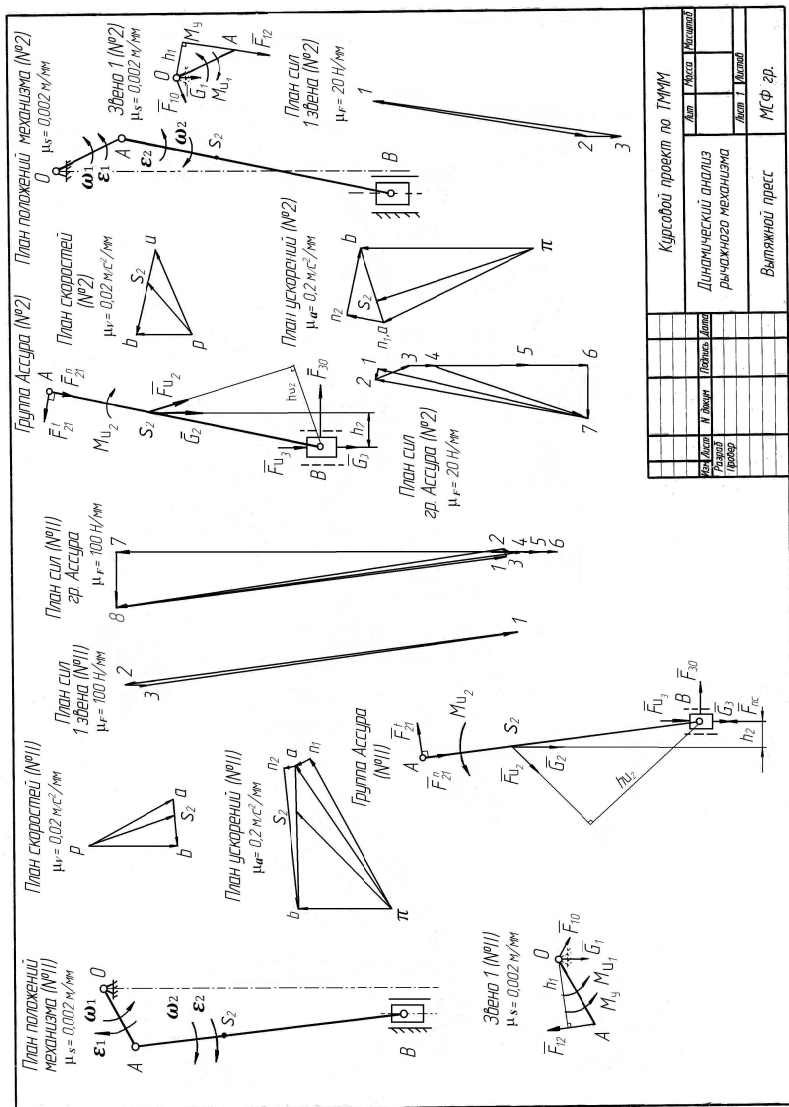
## ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1





## ПРИЛОЖЕНИЕ 2





Учебное издание

**ДУБОВСКАЯ** Елена Михайловна  
**АКУЛИЧ** Валерий Константинович

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ, МАШИН  
И МАНИПУЛЯТОРОВ**

Пособие  
для студентов специальности 6-05-0714-03  
«Инженерно-техническое проектирование  
и производство материалов и изделий из них»

Редактор *К. С. Мельникова*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 13.01.2025. Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 3,89. Уч.-изд. л. 1,21. Тираж 100. Заказ 278.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.